Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1649, Vektoranalys och komplexa funktioner
Tentamen, lördagen den 2 juni 2012 kl 9.00–14.00. Lösningsförslag

1. Räkna ut flödesintegral

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

där $\mathbf{F} = (x - \sin y,\ y - \cos x,\ 2z)$ och ytan Y ges av ekvation $z = 6 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 4$. Normalen till Y väljs så att den har positivt z-komponent.

Lösning. Vi kompletterar ytan med en planskiva P som ges av villkor $z = 2$, $x^2 + y^2 \le 4$ till en sluten yta. Låt K beteckna den erhålna kroppen. Enligt Gauss sats

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz - \iint_P \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Vi har $\operatorname{div}\mathbf{F} = 4$ vilket ger oss

$$\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz = 4\iiint_K 1\,dx\,dy\,dz = 4\iint_{x^2+y^2\le 4}(4 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = 32\pi.$$

På planytan P normalen är $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ vilket ger

$$\iint_P \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 4} -4\,dx\,dy = -16\pi.$$

Svaret blir då 48π.

2. (a) Visa m h av indexräkning att

$$\nabla\times(f\,\nabla g) = \nabla f\times\nabla g,$$

där f och g är två skalärfält.

(b) Om man sätter $f = g$ i sista formeln då är $\nabla\times(f\,\nabla f) = 0$ vilket visar att vektorfältet $\mathbf{u} = f\,\nabla f$ är konservativt. Vad är potentialen av $\mathbf{u}$ uttryckt i f?

Lösning. (a) Om vi beteknar $\mathbf{v} = \nabla\times(f\,\nabla g)$, då är i-s komponent av vektorfältet $\mathbf{v}$ är

$$v_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_k}\right) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k} + \epsilon_{ijk} f\frac{\partial^2 g}{\partial x_j\partial x_k}.$$

Den första termen ger oss $\nabla f\times\nabla g$. Den andra termen blir 0 eftersom man kan omdöpa indexer j och k till varandra och använda egenskaper

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j\partial x_k} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k\partial x_j}\quad\text{samt}\quad \epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}.$$

(b) Svar: $f^2/2$.

3. Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där C är en cirkel med radien R i planet $x + 2y - 2z = 5$ och

$$\mathbf{F} = (z - x^2, y^3 + x, z^3 - x).$$

Omloppsriktningen är inte specifierad så att svaret är inte entydigt.

Lösning. Enligt Stokes sats

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F})\, \mathbf{n}\, dS,$$

där Y är ytan omsluten av C. Vi räknar $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 2, 1)$. Från planets ekvation får vi normalen $\mathbf{n} = \pm \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ vilket ger oss $(\nabla \times \mathbf{F})\, \mathbf{n} = \pm\frac{2}{3}$.

Integralen blir

$$\pm\frac{2}{3}\, \mathrm{Area}\,(Y) = \pm\frac{2\pi R^2}{3}.$$

4. Ett vektorfält ges i sfätiska koordinater (r, θ, ϕ) av

$$\mathbf{F} = \frac{Ar\cos\phi}{(1 + r^2)^2}\mathbf{e}_r + \frac{\sin\phi}{r(1 + r^2)\sin\theta}\mathbf{e}_\phi,$$

där A är en konstant.

(a) Bestäm ett värde på A så att $\mathbf{F}$ blir konservativt.

(b) Beräkna, för detta värde på A, potentialen till $\mathbf{F}$.

Lösning. Om en funktion ψ är potentialen till $\mathbf{F}$, då är

$$\mathbf{F} = \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi,$$

vilket ger ekvationer

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{Ar\cos\phi}{(1 + r^2)^2}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\phi} = \frac{\sin\phi}{1 + r^2}.$$

Den sista ekvatinen ger oss

$$\psi(r, \theta, \phi) = -\frac{\cos\phi}{1 + r^2} + C(\theta, r),$$

där $C(\theta, r)$ är någon funktion beroende endast på θ och r. Den andra ekvationen ger oss $\frac{\partial C}{\partial\theta} = 0$ vilket visar att C beror endast på θ. Till slut, den första ekvationen uppfylls endast om $A = 2$ och $C = \mathrm{const}$.

Svar: $A = 2$ och potentialen $\psi = -\frac{\cos\phi}{1+r^2} + C$, där C är någon konstant.

5. (a) Visa att funktionen $v(x, y) = e^y(\cos x - \sin x)$ uppfyller Laplaces ekvation och bestäm en funktion $u(x, y)$ sådan att funktionen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ är komplext deriverbar.

(b) Uttryck erhållen funktion $w = f(z)$ i komplex variabel z.

Lösning. (a) Laplaces ekvation $\Delta v = 0$ verifieras med direkt beräkning. Funktionen u skall uppfylla CR-ekvationer vilket ger oss

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^y(\cos x - \sin x); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^y(\sin x + \cos x).$$

Ekvationerna uppfylls om

$$u(x, y) = e^y(\cos x + \sin x) + C,$$

där C är någon reel constant.

(b) Vi har

$$f(z) = e^y(\cos x + \sin x) + ie^y(\cos x - \sin x) + C =$$
$$e^y(\cos x - i\sin x + i(\cos x - i\sin x)) + C =$$
$$(1+i)e^y(\cos x - i\sin x) + C = (1+i)e^{y-ix} = (1+i)e^{-i(x+iy)} + C = (1+i)e^{-iz} + C.$$

6. Man inför kroklinjiga koordinater (u, v, w) (där $u > v > 0$ och $0 \leq w < 2\pi$) genom samband

$$\begin{cases} x = (u^2 - v^2)\cos w; \\ y = (u^2 - v^2)\sin w; \\ z = 2uv. \end{cases}$$

(a) Visa att koordinatsystemet är ortogonalt;

(b) Bestäm skalfaktorerna h_u, h_v, h_w.

(c) Bestäm alla funktioner $\Phi = \Phi(u)$ som beror bara på u och uppfyller Laplaces ekvation $\nabla^2\Phi = 0$.

Lösning. (a) Vi bildar ortsvektor

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (\,(u^2 - v^2)\cos w,\ (u^2 - v^2)\sin w,\ 2uv).$$

Dess partiella derivator är

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u &= (2u\cos w, 2u\sin w, 2v); \\ \mathbf{r}'_v &= (-2v\cos w, -2v\sin w, 2u); \\ \mathbf{r}'_w &= (-(u^2 - v^2)\cos w, (u^2 - v^2)\sin w, 0). \end{aligned}$$

Beräkning av skalära produkter visar att dessa vektorer är ortogonala mot varandra vilket visar att koordinatsystemet är ortogonalt.

(b) Skalfaktorerna är

$$h_u = |\mathbf{r}'_u| = 2\sqrt{u^2 + v^2}; \quad h_v = |\mathbf{r}'_v| = 2\sqrt{u^2 + v^2}; \quad h_w = |\mathbf{r}'_w| = u^2 - v^2.$$

(c) Om $\Phi = \Phi(u)$, då är

$$\nabla\Phi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{\Phi'(u)}{2\sqrt{u^2+v^2}}\mathbf{e}_u$$

och

$$\nabla^2\Phi = \operatorname{div}\nabla\Phi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(h_v h_w \frac{\Phi'(u)}{2\sqrt{u^2+v^2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{4(u^2+v^2)(u^2-v^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-v^2)\Phi'(u)\right).$$

Detta är 0 om

$$(u^2-v^2)\Phi'(u) = C(v,w)$$

vilket ger oss

$$\Phi'(u) = \frac{C(v,w)}{u^2-v^2},$$

där $C(v,w)$ är någon funktion som beror endast på v och w. Den sista likheten är möjlig endast om $\Phi'(u) = 0$ vilket ger oss $\Phi(u) = \text{const}$.

7. Den komplexa funktionen $w = \tan z$ definieras som

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

i punkter där nämnaren är nollskild.

(2p) (a) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $\tan z = -2i$.

(2p) (b) Bestäm bilden av området $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re} z < 0$ under avbildningen $w = \tan z$.

Lösning. (a) Vi har ekvation

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} = -2i.$$

Om vi inför beteckning $u = e^{iz}$ då blir ekvationen

$$u - \frac{1}{u} = 2\left(u + \frac{1}{u}\right).$$

Det är samma som $u^2 = -3$ varav $u = \pm i\sqrt{3}$. Vi har alltså

$$e^{iz} = \pm i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{\pm i\pi/2 + 2\pi ik} = \sqrt{3}e^{i(\pi/2+\pi l)},$$

där l är heltal. Detta ger oss

$$iz = \frac{1}{2}\ln 3 + i(\pi/2 + \pi l)$$

och

$$z = -\frac{i}{2}\ln 3 + \pi/2 + \pi l.$$

(b) Som tidigare, vi inför variabel $u = e^{iz}$. Då är

$$\tan z = -i\frac{u^2-1}{u^2+1}.$$

Avbildningen $z_1 = iz$ roterar området och det nya området blir $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z_1 < 0$. Nästa avbildning är $u = e^{z_1}$ och bilden blir den fjärde kvadranten $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Im} u < 0$. Efter kvadrering $v = u^2$ får vi den nedre halvplanet $\operatorname{Im} v < 0$ och till slut den avbildning $w = \tan z = -i\frac{v-1}{v+1}$ ger oss halvplanet $\operatorname{Re} w < 0$.

(4p) **8.** Bestäm en reell funktion $\phi(x, y)$ som satisfierar Laplaces ekvation i området

$$D = \{z \,:\, |z| < 2 \text{ och } \mathrm{Re} z > 0\}$$

och som antar följande värden på D-s rand:

$$\begin{cases} \phi(it) = -2 \text{ då } -2 < t < 2; \\ \phi(z) = 1 \text{ då } |z| = 2, \mathrm{Re} z > 0. \end{cases}$$

Lösning. Först avbildar vi området med avbildning $u = \frac{z-2i}{z+2i}$. Det nya området blir kvadranten $\operatorname{Re} u < 0$, $\operatorname{Im} u < 0$ och imaginära intervallet mellan $-2i$ och $2i$ övergår till negativa reella halvaxeln och halvcirkeln övergår till negativa imaginära halvaxeln.

Nästa avbildningen är kvadrering $w = u^2$. Vi får det nya området som är övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$. Om vi söker funktionen ϕ i form $\phi(z) = \psi(w(z))$, då skall funktionen ψ uppfylla Laplaces ekvation i övre halvplanet och den skall också uppfylla randvillkor $\psi(x) = -2$ för x på den positiva reella halvaxeln och $\psi(x) = 1$ på den negativa halvaxeln. Funktionen ψ ges av formeln

$$\psi(w) = 1 - 3\frac{1}{\pi}(\pi - \arg w) = -2 + \frac{3}{\pi}\arg w.$$

Detta ger oss svar

$$\phi(z) = -2 + \frac{3}{\pi}\arg w(z),$$

där

$$w(z) = \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2$$

.