Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1649, Vektoranalys och komplexa funktioner

Tentamen, lördagen den 2 juni 2012 kl 9.00–14.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtna hjälpmedel är formelsamlingen BETA samt TETs inplastade formelblad.

För godkänd (betyg E) krävs minst 12 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 15p för D, 18p för C, 21p för B samt 24p för A. Den som får 11p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Den som klarar kontrollskrivning 1, 2 eller 3 får full poäng på motsvarande uppgift.

L Y C K A T I L L !

(3p) **1.** Räkna ut flödesintegral

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

där $\mathbf{F} = (x - \sin y,\ y - \cos x,\ 2z)$ och ytan Y ges av ekvation $z = 6 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$. Normalen till Y väljs så att den har positivt z-komponent.

(2p) **2.** (a) Visa m h av indexräkning att

$$\nabla \times (f\,\nabla g) = \nabla f \times \nabla g,$$

där f och g är två skalärfält.

(1p) (b) Om man sätter $f = g$ i sista formeln då är $\nabla \times (f\,\nabla f) = 0$ vilket visar att vektorfältet $\mathbf{u} = f\,\nabla f$ är konservativt. Vad är potentialen av $\mathbf{u}$ uttryckt i f?

(3p) **3.** Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där C är en cirkel med radien R i planet $x + 2y - 2z = 5$ och

$$\mathbf{F} = (z - x^2, y^3 + x, z^3 - x).$$

Omloppsriktningen är inte specifierad så att svaret är inte entydigt.

4. Ett vektorfält ges i sfätiska koordinater (r, θ, ϕ) av

$$\mathbf{F} = \frac{Ar\cos\phi}{(1+r^2)^2}\mathbf{e}_r + \frac{\sin\phi}{r(1+r^2)\sin\theta}\mathbf{e}_\phi,$$

där A är en konstant.

(2p) (a) Bestäm ett värde på A så att $\mathbf{F}$ blir konservativt.

(1p) (b) Beräkna, för detta värde på A, potentialen till $\mathbf{F}$.

VÄND!

(2p) **5.** (a) Visa att funktionen $v(x,y) = e^y(\cos x - \sin x)$ uppfyller Laplaces ekvation och bestäm en funktion $u(x,y)$ sådan att funktionen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ är komplext deriverbar.

(1p) (b) Uttryck erhållen funktion $w = f(z)$ i komplex variabel z.

6. Man inför kroklinjiga koordinater (u, v, w) (där $u > v > 0$ och $0 \leq w < 2\pi$) genom samband

$$\begin{cases} x = (u^2 - v^2)\cos w; \\ y = (u^2 - v^2)\sin w; \\ z = 2uv. \end{cases}$$

(1p) (a) Visa att koordinatsystemet är ortogonalt;

(1p) (b) Bestäm skalfaktorerna h_u, h_v, h_w.

(1p) (c) Bestäm alla funktioner $\Phi = \Phi(u)$ som beror bara på u och uppfyller Laplaces ekvation $\nabla^2\Phi = 0$.

7. Den komplexa funktionen $w = \tan z$ definieras som

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

i punkter där nämnaren är nollskild.

(2p) (a) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $\tan z = -2i$.

(2p) (b) Bestäm bilden av området $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}z < 0$ under avbildningen $w = \tan z$.

(4p) **8.** Bestäm en reell funktion $\phi(x,y)$ som satisfierar Laplaces ekvation i området

$$D = \{z \,:\, |z| < 2 \text{ och } \mathrm{Re}z > 0\}$$

och som antar följande värden på D-s rand:

$$\begin{cases} \phi(it) = -2 \text{ då } -2 < t < 2; \\ \phi(z) = 1 \text{ då } |z| = 2, \mathrm{Re}z > 0. \end{cases}$$