KTH Matematik

SF1658 Trigonometri och funktioner
Lösningsförslag till tentamen
den 19 oktober 2009

1. a) Visa att $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$. **(2)**

   b) En triangel har sidor av längd 5 och 7, och en vinkel är 60 grader. Bestäm den största arean till en sådan triangel. **(4)**

   c) I en cirkel med radie r placeras en reguljär 12-hörning på ett sådant sätt att hörnen hamnar på cirkeln. Om sidorna i 12-hörningen har längd 2, vad är radien till cirkeln? **(3)**

Lösning: a) Betrakta en triangel där alla vinklar är 60 grader. Låt sidolängderna ha längd d. Delar vi upp triangeln i två rätvinkliga trianglar får vi trianglar där vi känner till sidolängderna. Hypotenusan är d, och det ena katetet är av längd $\frac{1}{2}d$. Det följer av Pytagoras Sats att det andra katetet har längd $\frac{\sqrt{3}}{2}d$. Av definition av sinus har vi nu att

$$\sin(60) = \frac{\sqrt{3}d}{2}/d = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Låt triangeln ABC ha sidor av längd a, b och c, och låt vinkeln motstående till sida a vara 60 grader. Det första vi gör är att kolla vilka trianglar vi har. Om sidan $c = 7$, och $b = 5$, då får vi en unik triangel T_1, och arean $A(T_1) = \frac{1}{2}5 \cdot 7 \sin(60)$. Om $b = 5$, och sidan $a = 7$ då får vi också en unik triangel T_2. Vi använder cosinussatsen för att bestämma sidan c. Vi har

$$7^2 = 5^2 + c^2 - 2 \cdot 5 \cdot c \cdot \cos(60) = 25 + c^2 - 5c.$$

Detta ger

$$(c - \frac{5}{2})^2 = 24 + \frac{5^2}{2^2} = \frac{121}{4},$$

och att $c = \pm\frac{11}{2} + \frac{5}{2}$. Om vinkeln $\alpha = 60$ då måste sidolängden $c \geq 5/2$, och därmed har vi att $c = \frac{16}{2} = 8$. Arean blir $A(T_2) = \frac{1}{2}5 \cdot 8 \sin(60)$. För fallet med $c = 7$, och $a = 5$, och vinkeln $\alpha = 60$, har vi följande. Vi drar en cirkel med radius 5, och center i hörnet C. Cirkelbågen kan ha två skärningar, en skärning, eller ingen skärning, med linjen genom hörnet A, och infallsvinkel 60 grader. Detta betyder att det antingen finns 2, 1 eller inga trianglar med $c = 7$, $a = 5$ och $\alpha = 60$ grader. Cosinussatsen ger

$$25 = b^2 + 49 - 7b \quad \text{eller ekvivalent} \quad (b - \frac{7}{2})^2 = -24 + 49/4 < 0.$$

Ekvationen har inte reella rötter, och föjldaktligen finns inte den sökta triangeln.

c) Den reguljära 12-hörning består av 12 trianglar T. Varje triangel har två sidolängder lika med radien till cirkeln, och öppningsvinkeln är 360/12=30 grader. Sidan motsvarande till vinkeln 30 har längd 2. Cosinussatsen ger nu

$$4 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r\cos(30) = 2r^2 - 2r^2\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi skriver om ekvationen som

$$2 = r^2(\frac{2-\sqrt{3}}{2}).$$

Detta ger $r = \pm\sqrt{\frac{4}{2-\sqrt{3}}}$, varav en rot är positiv.

Svar:

a) -

b) Arean är $10\sqrt{3}$

c) Radien är $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

2. a) Bestäm skärningspunkterna mellan funktionsgraferna till sinusfunktionen $f(x) = \sin(x/2 + \pi/6)$ och konstantfunktionen $g(x) = -1/2$. **(4)**

b) Bestäm uttryck för A och ϕ sådan att $2\sin(\omega t) - 3\cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \phi)$. **(3)**

c) Bestäm exakt $\sin(14\pi/16)$. **(2)**

Lösning: a) Vi söker lösningar till $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$. Ekvationen $\sin(u) = -\frac{1}{2}$ har lösningarna

$$u = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{och } u = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

för godtyckliga heltal n. Substitutionerna

$$u = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \quad \text{dvs} \quad 2(u - \frac{\pi}{6}) = x$$

ger lösningarna

$$x = -\frac{2}{3}\pi + 4\pi n \quad \text{och} \quad x = -2\pi + 4\pi n.$$

b) Additionsformeln för sinus ger att

$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t)\cos(\varphi) + A\cos(\omega t)\sin(\varphi).$$

Ekvationen $A\sin(\omega t + \varphi) = 2\sin(\omega t) - 3\cos(\omega t)$ ger

$$A\cos(\varphi) = 2 \quad \text{och} \quad A\sin(\varphi) = -3.$$

Vi får att $A^2 = 4 + 9 = 13$, och väljer $A = \sqrt{13}$. Ekvationerna

$$\varphi = \arccos(2/\sqrt{13}) \quad \text{och} \quad \varphi = \arcsin(-3/\sqrt{13})$$

bestämmer en unik vinkel, nämligen $\arcsin(-3/\sqrt{13})$, i intervallet $[0, 2\pi)$.

c) Vi har att $14/16 = 7/8 = 1 - 1/8$. Då $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, har vi att $\sin(\pi/8) = \sin(7\pi/8)$. Vi vill använda att

$$\sin^2(x/2) = \frac{1 - \cos(x)}{2}.$$

Med $x = 1/4$ får vi att

$$\sin(\pi/8) = \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}.$$

Det är klart av definition av sinus att $\sin(\pi/8)$ är positiv.

Svar:

a) Svar $x = \frac{-2\pi}{3} + 4\pi n$ och $x = -2\pi + 4\pi n$, heltal n.

b) Svar $A = \sqrt{13}$, $\varphi = \arcsin(-3/\sqrt{13})$.

c) Svar $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3. a) Skriv följande komplexa tal på formen $a + bi$. **(3)**

$$a) \quad (2 - 3i)\overline{(-1 - 2i)} \quad b) \quad (3 - i)^{-2} \quad c) (4 - 7i)^3(4 - 7i)^{-4}(4 - 7i)^2.$$

b) Skriv på formen $a + bi$ talet **(2)**

$$(\cos(\pi/200) + i\sin(\pi/200))^{50}.$$

c) Låt z_1 och z_2 vara nollställen till polynomet $z^2 + az + b$, där a och b är reella tal. Visa att antigen har vi att $\overline{z_1} = z_1$ och $\overline{z_2} = z_2$, eller så har vi att $\overline{z_1} = z_2$ och $\overline{z_2} = z_1$. **(4)**

Lösning: a1) Vi har att $\overline{-1 - 2i} = -1 + 2i$, sådan att

$$(2 - 3i)\overline{(-1 - 2i)} = (2 - 3i)(-1 + 2i) = -2 + 6 + i(3 + 4) = 4 + 7i.$$

a2) Inversen till $(3 - i)$ är $\frac{1}{10}(3 + i)$. Därmed blir

$$(3 - i)^{-2} = (\frac{1}{10}(3 + i))^2 = \frac{1}{100}(3^2 - 1 + i(3 + 3)) = \frac{1}{100}(8 + 6i).$$

a3) Vid summering av potenserna får vi att

$$(4 - 7i)^3(4 - 7i)^{-4}(4 - 7i)^2 = (4 - 7i).$$

b) På polärform är talet $(\cos(\pi/200) + i\sin(\pi/200)$ lika med $(1, \pi/200)$. Vi har att

$$(1, \pi/200)^{50} = (1^{50}, 50\pi/200) = (1, \pi/4).$$

Därmed har vi att det sökta talet är

$$\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Vi har givet att polynomet $z^2 + az + b = (z - z_1)(z - z_2)$. Nollställemängden förblir den samma efter konjugering $z^2 + \overline{a}z + \overline{b} = z^2 + az + b$. Detta medför att konjugering antingen bevarar z_1 och z_2, vilket betyder att båda är reella. Eller så vill konjugeringen skicka z_1 till z_2, och z_2 till z_1.

Svar:

a) Svar $4 + 7i$, $\frac{1}{100}(8 + 6i)$ och $4 - 7i$.

b) Svar $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) -

4. a) Bestäm derivatan till **(3)**

$$\sin^2(\cos(x^3)).$$

b) Du har att $\sin'(0) = 1$ och att $\cos'(0) = 0$. Använd derivatans definition för att bestämma $\sin'(x)$ i en godtycklig punkt. **(3)**

c) Omkretsen till en cirkel med radie r ges som bekant av $2\pi r$. Låt $A(r)$ vara arean till cirkeln med radie r. Använd derivatans definition samt lämpliga figurer för att bestämma $A(r)$. Vink: Bestäm först $A'(r)$.

(3)

Lösning: a) Direkt tillämpning av kedjeregeln ger att derivatan till $\sin^2(\cos(x^3))$ är

$$2\sin(\cos(x^3))\cos(\cos(x^3))(-1)\sin(x^3)3x^2.$$

b) Additionsformeln för sinus ger att

$$\sin(x + h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x),$$

vilket ger att

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sin(x)\frac{1 - \cos(h)}{h} + \cos(x)\frac{0 - \sin(h)}{h} \right).$$

Uttrycket ovan är $\sin(x)\cos'(0) + \cos(x)\sin'(0) = \cos(x)$.

c) Uttrycket $A(r+h) - A(r)$, med positiva h, kan approximeras enligt följande

$$2\pi r \cdot h \leq A(r+h) - A(r) \leq 2\pi(r+h) \cdot h.$$

Negativa h ger liknande uttryck med omvända olikheter. Detta ger att

$$A'(r) = \lim_{h \to 0} \frac{A(r+h) - A(r)}{h} = 2\pi r,$$

och följdaktligen att $A(r) = \pi r^2 + C$, för någon konstant C. Vi har att $A(r) = 0$, vilket ger att $C = 0$.

Svar:

a) Svar $-6x^2 \sin(\cos(x^3) \cos(\cos(x^3)) \sin(x^3)$.

b) -

c) -

5. a) Bestäm arean mellan funktionsgrafen till funktionen $f(x) = \cos(x)$ och x-axeln, över intervallet $[-2\pi, 2\pi]$. **(2)**

b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = 3\sin(2x)\sqrt{\pi + \cos(2x)}$. **(3)**

c) Bestäm t sådan att funktionen

$$F(t) = \int_0^{\pi/2} (t\cos(x) + e^{\sin(x)})^2 \, dx$$

har ett extremvärde. **(4)**

Lösning: a) Funktionen $f(x) = \cos(x)$ är periodisk, och det är klart att den sökta arean är fyra gånger arean

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \, dx = [\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

b) Vi gör substitutionen $u = \pi + \cos(2x)$ villket ger

$$du = -2\sin(2x) \, dx \quad \text{dvs} \quad -\frac{1}{2} du = \sin(2x) \, dx.$$

Med denna substitution blir integralen

$$\int 3\sin(2x)\sqrt{\pi + \cos(2x)} \, dx = \int -\frac{3}{2}\sqrt{u} \, du = -(u)^{\frac{3}{2}} = -(\pi + \cos(2x))^{\frac{3}{2}} + C,$$

för någon konstant C.

c) Funktionen $F(t)$ är

$$\int_0^{\pi/2} t^2\cos^2(x) + 2t\cos(x)e^{\sin(x)} + e^{2\sin(x)}\,dx.$$

Vi har att $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(x/2)}{2}$, vilket ger att

$$t^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\,dx = t^2[\frac{1}{2}x + \sin(x/2)]_0^{\pi/2} = t^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4}t^2(\pi + 2\sqrt{2}).$$

Substitutionen $u = \sin(x)$ ger

$$\int_0^{\pi/2}\cos(x)e^{\sin(x)}\,dx = \int e^u\,du = [e^u] = [e^{\sin(x)}]_0^{\pi/2} = e^1 - 1.$$

Detta betyder att

$$F(t) = \frac{1}{4}t^2(\pi + 2\sqrt{2}) + 2t(e^1 - 1) + \int_0^{\pi/2} e^{2\sin(x)}\,dx$$

där $\int_0^{\pi/2} e^{2\sin(x)}$ är någon konstant, oberoende av talet t. Derivering ger

$$F'(t) = \frac{1}{2}t(\pi + 2\sqrt{2}) + 2(e^1 - 1),$$

och ekvationen $F'(t) = 0$ har lösning

$$t = \frac{4(1 - e^1)}{\pi + 2\sqrt{2}}.$$

Svar:

a) Arean är 8.

b) En primitiv funktion är $-(\pi + \cos(2x))^{\frac{3}{2}}$.

c) Svar $t = \frac{4(1-e^1)}{\pi+2\sqrt{2}}$.