SF1658 (SF620) TRIGONOMETRI OCH FUNKTIONER
TENTAMEN 24 AUGUSTI 2011

Skrivtid: 14.00-17.00
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare med sifferdisplay
Examinator: Roy Skjelnes

Varje uppgift motsvarar en kontrollskrivning. Varje uppgift poängsätts med högst 12 poäng, varav 6 poäng är gränsen för godkänt. Betyg på tentamen (SF1658) bestäms av summan av poängen från de fem[1] delarna, under förutsättningen att alla delar är godkända, enligt följande skala. Betyg[2] A, 52-60 poäng, betyg B, 44-51 poäng, betyg C 38-43 poäng, betyg D, 34-37 poäng, betyg E, 30-33 poäng.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl. Presentationen ger upp till 3 poäng på varje uppgift. Lycka till!

GEOMETRI, Uppgift I tillsvarande KS I

Betrakta triangeln T med hörn i punkterna $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ och $C = (5, 1)$.

a) Bestäm sinus till alla vinklar i triangeln T. **(4)**
b) Bestäm vilken vinkel som är störst. **(3)**
c) Bestäm arean till triangeln T. **(2)**

Lösningsförslag.

a) Vi börjar med att bästamma längden till sidorna i triangeln. Vi har att $a = \sqrt{(2-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18}$, och liknande beräkning ger att $b = \sqrt{20}$ och att $c = \sqrt{2}$. Cosinussatsen ger relationen

$$\cos(\alpha) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}.$$

Vilket ger oss att

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\beta) = 0 \quad \text{och} \quad \cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

[1] Uppgift 3 ingår inte i tentamen för kursen SF1620 Matematik och modeller. Enbart de fyra delarna som tillsvarar uppgifterna 1, 2, 4 och 5 ingår i tentamen för SF1620.

[2] Betyggränserna gäller inte för kursen SF1620.

De sökta sinusvärderna blir då

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin(\beta) = 1 \quad \text{och} \quad \sin(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

b) Vinkeln $\beta = 90°$, och denna måste därmed vara störst. Summan av de två kvarstående vinklarna blir 90.

c) Vi har redan sätt att triangeln är rätvinklig, vilket betyder att arean är

$$\frac{1}{2}ac = \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = 3.$$

TRIGONOMETRI, Uppgift II tillsvarande KS II

a) Bestäm skärningspunkterna mellan funktionsgraferna till funktionen $f(x) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{4})$ och funktionen $g(x) = -\sqrt{2}$. **(4)**

b) Bestäm A och ϕ sådan att **(3)**

$$3\sin(\omega t) - \sqrt{3}\cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \phi).$$

c) Skriv upp additionsformeln för cosinus. **(2)**

Lösningsförslag

a) Vi söker x sådan att $f(x) = g(x)$, vilket betyder att

$$\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ekvationen $\cos(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ har lösningar $\pm\frac{3}{4}\pi$ på intervallet $[-\pi, \pi)$. Detta ger att lösningarna till $\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ges av ekvationen

$$3x = \pm\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi + 2\pi n,$$

med godtyckliga heltal n. De sökta lösningarn är

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \quad \text{och} \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}.$$

b) Vi använder att $A\sin(\omega t+\phi) = A\sin(\omega t)\cos(\phi)+A\cos(\omega t)\sin(\phi)$. Detta ger oss ekvationerna

$$A\cos(\phi) = 3 \quad \text{och} \quad A\sin(phi) = -\sqrt{3}.$$

En lösning är $A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, och $\phi = -\frac{\pi}{6}$.

c) Additionsformeln för cosinus är

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

KOMPLEXA TAL, Uppgift III tillsvarande KS III

a) Låt $z = \frac{1+i}{2+i}$. Skriv följande tre tal på formen $a + bi$, **(3)**

$$3z, \quad z^2 \quad \text{och} \quad z^{-1}.$$

b) Skriv talet z^6 på polär form, där $z^2 = \frac{1+i}{2i}$. **(3)**

c) Talet $-2-i$ är ett nollställe till polynomet

$$p(z) = (z+i)(z^2+3z+3-i).$$

Bestämalla nollställerna till polynomet. **(3)**

Lösningsförslag

a) Om $z = \frac{1+i}{2+i}$ då har vi att

$$z = \frac{(1+i)(2-i)}{5} = \frac{1}{5}(3+i).$$

Detta ger att $3z = \frac{3}{5}(3+i)$, och att

$$z^2 = \frac{1}{25}(9-1+3i+3i) = \frac{1}{25}(8+6i).$$

Slutligen har vi att

$$z^{-1} = \frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{2} = \frac{1}{2}(3-i).$$

b) Vi har att $(1+i) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ och att $2i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$. Detta ger att

$$w = \frac{1+i}{2i} = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Vi har vidare att $w^3 = z^6$, vilket betyder att

$$z^6 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^3\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

c) Polynomet $p(z)$ är produkten av $(z+i)$ och $z^2+3z+3-i$. Nollställen till $p(z)$ är nollställerna till varje faktor i produkten. Polynomet $z+i$ har ett nollställe, nämligen $z=-i$. Polynomet $z^2+3z+3-i$ har två nollställen, och vi har från uppgiften att $-2-i$ är ett av dessa. Detta ger att $z^2+3z+3-i = (z-(a+bi))(z+2+i)$. Multiplicerar vi ut produkten till höger erhåller vi

$$z^2 + z(2+i-a-bi) + (-2a+b) + (-2b-a)i,$$

vilket betyder att

$$3 = 2-a+(1-b)i.$$

Detta ger $a=-1$, och att $b=1$. Det sökta nollställe är därmed $z=-1+i$.

DERIVERING, Uppgift IV tillsvarande KS IV

Mängden av talpar (x,y) som satisfierar ekvationen $4x^2+9y^2=2$ definierar en ellips E i planet.

a) Visa att talparet $P = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{3})$ är på ellipsen E. **(2)**

b) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till ellipsen E genom punkten P. **(4)**

c) Derivera funktionen **(3)**

$$f(x) = \sin(x^3)^2.$$

Lösningsförslag

a) Vi insätter $P = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ och får att $4\frac{1}{2^2} + 9\frac{1}{3^2} = 1 + 1 = 2$, vilket betyder att P är en punkt på ellipsen E.

b) Av ellipsens ekvation har vi att $y^2 = \frac{1}{9}(2 - 4x^2)$, vilket ger att $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2 - 4x^2}$. Om vi betraktar funktionen $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{2 - 4x^2}$ definierad på intervallet $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ så vill dennas funktionsgraf samanfalla med den delen av ellipsen som finns på undersidan av x-axeln. Vi kan därför bestämma tangentlinen till funktionsgrafen till f i punkten P. Vi har att

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{2}(2 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}}2 \cdot (-4x) = \frac{4x}{3\sqrt{2 - 4x^2}}.$$

En ekvation för tangentlinjen genom $P = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ ges av

$$y = f'(\frac{1}{2})x + f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}f'(\frac{1}{2}).$$

Vi har att $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}$ och att $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$. Detta ger att tangentlinjen ges av

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}.$$

c) Vi deriverar

$$\frac{d\sin(x^3)^2}{dx} = 2 \cdot (\sin(x^3)) \cdot \cos(x^3) \cdot 3 \cdot (x^2).$$

INTEGRERING, Uppgift V tillsvarande KS V

a) Bestäm arean över x-axeln, och under funktionsgrafen till funktionen $f(x) = \frac{1}{2} + \sin(x)$, över intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. **(3)**

b) Hitta en primitiv funktion till **(3)**

$$f(x) = (3 + x^2)^{\frac{3}{2}}x + 3 + x^2.$$

c) Kurvan $y = \sqrt{x} + 1$ med $0 \leq x \leq 2$ roteras omkring y-axeln, och bildar en skål S. Beräkna volymen till skålen S. **(3)**

Lösningsförslag

a) Funktionen $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}$ har på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ enbart nollställe i $x = -\frac{\pi}{6}$. Av figur ser vi att den sökta arean ges av integralen

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) + \frac{1}{2})\, dx.$$

En primitiv funktion till $f(x)$ är $-\cos(x) + \frac{1}{2}x$, vilket ger att arean är

$$-\cos(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - (-\cos(-\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) En primitiv funktion till $(3+x^2)^{\frac{3}{2}}x$ är $\frac{1}{5}(3+x^2)^{\frac{5}{2}}$. Detta ger att en sökt primitiv funktion är

$$\frac{1}{5}(3+x^2)^{\frac{5}{2}}+3x+\frac{1}{3}x^3.$$

c) Av figur är det klart att vi kan anta att $y=\sqrt{x}$. Detta betyder att $y^2=x$. Vi betraktar nu funktionen $f(y)=y^2$, på intervallet $0\leq y\leq\sqrt{2}$. Då vill funktionsgrafen till f vara precis kurvsegmentet vi vill rotera. Volymen till en sådan rotationskropp är given som

$$\int_0^{\sqrt{2}}\pi f^2(y)dy=\int_0^{\sqrt{2}}\pi y^4dy=\pi[\frac{1}{5}y^5]_0^{\sqrt{2}}=\pi\frac{\sqrt{2}^5}{5}.$$