KTH, Matematik
Gunnel Roman och Maria Saprykina

Tentamen i SF1659, Matematik Baskurs, 12-01-2011
Lösningsförslag.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera. Fullständiga lösningar krävs för full poäng. Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt.
Uppgifterna 1 och 2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j får automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte ska lösas).
Uppgifterna 3–6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter. Uppgifterna 7–9 är lite mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, sk VG-poäng.
Preliminära betygsgränser: A–31 poäng varav minst 8 VG poäng, B–26 poäng varav minst 5 VG poäng, C–21 poäng varav minst 2 VG poäng, D–17, E–15, Fx–13.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@math.kth.se).

1. Lös ekvationen $|x+1|+|x-2|=5$.

Lösning: Enligt definition, $|x+1|=x+1$ för $x \geq -1$ och $|x+1|=-(x+1)$ för $x<-1$. På samma sätt, $|x-2|=x-2$ för $x \geq 2$ och $|x-2|=-(x-2)$ för $x<2$. Betrakta 3 fall.
Fall 1: $x<-1$. Ekvationen har formen $-(x+1)-(x-2)=5$. Denna har roten $x=-2$, som ligger i intervallet $x<-1$. -2 är en rot till den ursprungliga ekvationen.
Fall 2: $-1 \leq x < 2$. Ekvationen har formen $(x+1)-(x-2)=5$. Denna har inga rötter.
Fall 3: $x \geq 2$. Ekvationen har formen $(x+1)+(x-2)=5$. Denna har roten $x=3$, som ligger i intervallet $x \geq 2$. 3 är en rot till den ursprungliga ekvationen.
Svar: Ekvationen har rötter $x=-2$ and $x=3$.

2. Lös följande ekvationer:

a). $3^{3x}=27\cdot 9^x \Leftrightarrow 3^{3x}=3^3\cdot(3^2)^x \Leftrightarrow 3^{3x}=3^{3+2x}$. Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är detta ekvivalent med $3x=3+2x$. Lösningen är $x=3$.
b). $\ln\sqrt{6+e^x}=x \Leftrightarrow \ln\sqrt{6+e^x}=\ln e^x$. Eftersom logaritmfunktionen är injektiv, är detta ekvivalent med $\sqrt{6+e^x}=e^x$. Beteckna $y=e^x$ (kom ihåg att beteckningen kräver att $y>0$). Vi får ekvationen

$$\sqrt{6+y}=y.$$

Kvadrera: $6+y=y^2$. Rötterna är $y=3$ och $y=-2$. Vi måste verifiera att rötterna löser ekvationen $\sqrt{6+y}=y$. Roten $y=3$ passar. Roten $y=-2$ uppfyller ändå inte kravet $y>0$, och därför är ointressant.
Svar: $x=\ln 3$.

3 a). Beräkna exakt $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Lösning: $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. Kom ihåg: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$. Därför $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$, och för $2x = t$ får vi $\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos t + 1}{2}$.

I vårt problem: $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \cos^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$. Slutligen, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$. Vi tog roten med "+" eftersom vinkeln $\frac{\pi}{12}$ är mindre än $\frac{\pi}{2}$ till absolutbelopp, och har därför positiv cosinus.

3 b). Lös ekvationen $\cos x = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Ekvationen kan skrivas om:

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right).$$

Denna har 2 serier av lösningar. Den första är $x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, vilket ger, efter omskrivning,

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Den andra är $-x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, vilket ger, efter omskrivning,

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. Lös ekvationen $\ln x + \ln(x-1) = \ln(x+3)$.
Lösning: Ekvationen kan skrivas om: $\ln x(x-1) = \ln(x+3)$. Eftersom logaritm-funktionen är injektiv på dess definitionsmängd, är detta ekvivalent med $x(x-1) = x+3$ (OBS: ekvivalensen gäller bara för de x där båda ekvationer har mening). Den sista ekvationen har rötter $x = 3$ och $x = -1$. Verifiera att rötterna uppfyller den ursprungliga ekvationen. För $x = -1$ har ekvationen ingen mening, därför -1 är ingen rot. Insättning av $x = 3$ ger rätt identitet.
Svar: $x = 3$.

5. Lös olikheten $x + \dfrac{6}{x} < 5$. Skriv om olikheten:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x} < 0.$$

Tecknet hos vänsterled kan undersökas med hjälp av teckentabell.
Svar: Olikheten är uppfylld för $x \in (-\infty, 0)$ eller $x \in (2, 3)$.

6. Ange talet n sådan att $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k + k\right) = 7 - \frac{1}{81}$.
Lösning: Summan ovan är lika med

$$\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{2}{3}\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} = 1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Detta är lika med $7 - \frac{1}{81}$ för $n = 3$.

7. Bestäm koefficienten framför x^4 i utvecklingen av $\left(3x+\frac{1}{2x}\right)^8$. Svaret får innehålla potenser.

Lösning: Enligt binomialsatsen, $\left(3x+\frac{1}{2x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(3x)^k\left(\frac{1}{2x}\right)^{8-k}$. Vi söker k sådan att $x^k\left(\frac{1}{x}\right)^{8-k} = x^4$, dvs $x^{k-(8-k)} = x^4$. Det sökta värdet av k är $k=6$.
Koefficienten vid x^4 beräknas enligt formeln med $k=6$. Den är

$$\binom{8}{6}(3)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{8-6} = \frac{8!}{6!(8-6)!}3^6\frac{1}{2^2} = \frac{7\cdot 8}{2}3^6\frac{1}{4} = 7\cdot 3^6.$$

8. Lös olikheten $\frac{x}{|x-1|}\geq 3$. Olikheten har mening bara för $x\neq 1$. För sådana x är olikheten ekvivalent med

$$x\geq 3|x-1|.$$

Fall 1: $x>1$. För sådana x, $|x-1| = x-1$, och olikheten har form $x\geq 3(x-1)$. Denna är ekvivalent med $x\leq\frac{3}{2}$. Lösningar till den ursprungliga olikheten som vi fann i Fall 1 är de x som uppfyller $x>0$ och $x\leq\frac{3}{2}$, dvs $1<x\leq\frac{3}{2}$.
Fall 2: $x<1$. Här $|x-1| = -(x-1)$, och olikheten har form $x\geq 3(1-x)$. Denna är ekvivalent med $x\geq\frac{3}{4}$. I Fall 2 finner vi lösningar $\frac{3}{4}\leq x<1$.
Svar: Olikheten är uppfylld för $1<x\leq\frac{3}{2}$ eller $\frac{3}{4}\leq x<1$.

9. Följande funktion är given:

$$f(x) = \begin{cases}\ln x, & 0<x<1,\\ \sqrt{x-1}, & 1\leq x\leq 5.\end{cases}$$

a) Skissera grafen av f.
b). Ange inversen till f, samt inversens definitions- och värdemängd.
Inversens värdemängd är funktionens definitionsmängd, dvs $V_{f^{-1}} = (0,5]$. Inversens definitionsmängd är funktionens värdemängd, dvs $D_{f^{-1}} = (-\infty,2]$.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases}e^x, & x\in(-\infty,0),\\ x^2+1, & x\in[0,2].\end{cases}$$

c). Lös ekvationen $f^{-1}(x) = 4$. Enligt inversens definition, är $f^{-1}(x) = 4$ ekvivalent med $x = f(4)$. Enligt formeln ovan, $f(4) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.