KTH, Matematik
Gunnel Roman och Maria Saprykina

Tentamen i SF1659, Matematik Baskurs, 03-10-2011
Förslag till lösning.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.
Uppgifterna 1 och 2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j får automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte ska lösas).
Preliminära betygsgränser: A–31 poäng varav minst 8 VG poäng, B–26 poäng varav minst 5 VG poäng, C–21 poäng varav minst 2 VG poäng, D–17, E–15, Fx–13.

1. Lös ekvationen $x^2 + |4x - 5| = 7$.
Lösning: Per definition, har vi

$$|4x-5| = \begin{cases} 4x-5, & x \geq \frac{5}{4} \\ 5-4x, & x < \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Vi betraktar två fall beroende på tecknet av $(4x - 5)$.
Fall $x \geq \frac{5}{4}$:

$$x^2 + 4x - 5 = 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \text{ eller } x = -6.$$

Eftersom -6 inte ligger i intervallet $x \geq \frac{5}{4}$, är $x = -6$ ingen lösning.
Talet 2 ligger i $x \geq \frac{5}{4}$; $x = 2$ är en lösning.
Fall $x < \frac{5}{4}$:

$$x^2 - (4x - 5) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{6}.$$

Talet $2 + \sqrt{6}$ ligger inte i intervallet $x < \frac{5}{4}$, $x = 2 + \sqrt{6}$ är ingen lösning.
Talet $2 - \sqrt{6}$ ligger i $x < \frac{5}{4}$; det är en lösning.
Svar: $x = 2$ eller $x = 2 - \sqrt{6}$.

2. Lös ekvationerna:
2a). $3^{x+2} + 3^{2x+1} = 12$.
Lösning: Ekvationen är ekvivalent med $3^x 3^2 + 3(3^x)^2 = 12$. Beteckna 3^x för t. Ekvationen blir $9t + 3t^2 = 12$. Denna har rötter $t = 1$ och $t = -4$.
Gå tillbaka till den ursprungliga variabeln: $3^x = 1$ ger $x = 0$; $3^x = -4$ har ingen lösning.
Svar: $x = 0$.

2b). $\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Lösning: Vi har två serier av lösningar:
1). $2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
$2x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \pi n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, där $n \in \mathbb{Z}$.
2). $2x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$2x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, där $n \in \mathbb{Z}$.
Svar: Lösningarna ges av $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ eller $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ där $n \in \mathbb{Z}$.

3. Lös ekvationen $\dfrac{\ln(3x^2+13)}{\ln(2x+1)} = 2$.
Lösning: Notera att ekvationen bara har mening för $2x+1 > 0$. Vi ska verifiera att rötterna uppfyller detta krav.

Skriver om ekvationen:

$$\ln(3x^2+13) = 2\ln(2x+1) \Leftrightarrow \ln(3x^2+13) = \ln(2x+1)^2.$$

Eftersom funktionen $f(x) = \ln x$ är injektiv, är ekvationen ekvivalent med

$$3x^2+13 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+4x-12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ eller } x = -6.$$

För $x = -6$ har vi: $2x+1 < 0$, så $\ln(2x+1)$ är inte definierad. Detta är ingen lösning. Däremot är $x = 2$ en lösning.
Svar: $x = 2$.

4. Bestäm koefficienten framför x i utvecklingen av $\left(2x - \dfrac{3}{x^2}\right)^{10}$, $(x \neq 0)$.
Lösning: Enligt binomialsatsen, har vi utvecklingen:

$$\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x)^{10-k} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{10-k} (-3)^k x^{-2k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} (-3)^k x^{10-3k}.$$

$x^{10-3k} = x \Leftrightarrow 10-3k = 1 \Leftrightarrow k = 3$.

Binomialkoefficienten för $k = 3$ är $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2} = 10\cdot3\cdot4$.

Koefficienten framför x är således $10\cdot3\cdot4\cdot2^7(-3)^3 = -2^{10}\cdot3^4\cdot5$.
Svar: Koefficienten är $-2^{10}\cdot3^4\cdot5$.

5. Lös ekvationen $1+\sqrt{2x}-\sqrt{x+7} = 0$.
Lösning: Vi skriver om ekvationen:

$$1+\sqrt{2x} = \sqrt{x+7}.$$

Kvadrerar både höger- och vänsterled (ekvationen som vi får blir inte ekvivalent med den ursprungliga, vi måste verifiera rötterna sedan):

$$(1+\sqrt{2x})^2 = x+7 \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2x}+2x = x+7 \Leftrightarrow x-6 = -2\sqrt{2x}.$$

Kvadrerar en gång till:

$$(x-6)^2 = (-2\sqrt{2x})^2 \Leftrightarrow x^2-12x+36 = 4\cdot2x \Leftrightarrow x^2-20x+36 = 0.$$

$x = 18$ eller $x = 2$.

Verifierar rötterna: $x = 18$ ger $1+\sqrt{36}-\sqrt{25} = 1+6-5 \neq 0$. $x = 2$ ger: $1+\sqrt{4}-\sqrt{9} = 0$.

Svar: $x = 2$.

6. Lös ekvationen $\cos 2x + \sqrt{3}\sin x = -2$.
Lösning:

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = -2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{3}{2} = 0.$$

Beteckna $t = \sin x$.

$$t^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3} \text{ eller } t = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\sin x = t = \sqrt{3}$ ger inget svar.
$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ger: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ eller $x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Svar: Se raden ovan.

7. Lös olikheten $\frac{7x+2}{x+2} \geq 4x - x^2$.
Lösning:

$$\frac{7x+2}{x+2} \geq 4x - x^2 \Leftrightarrow \frac{7x + 2 + (x^2 - 4x)(x+2)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x+2} \geq 0.$$

Uttrycket kan undersökas mha teckentabell.
Svar: $x < -2$ eller $-1 \leq x \leq 1$ eller $x \geq 2$.

8. Uttryck $\cos(2\arcsin x)$ som ett polynom i x. För vilka x gäller din formel?
Lösning: Vi skriver om:

$$\cos(2\arcsin x) = 1 - (2\sin(\arcsin x))^2 = 1 - 2x^2$$

då $|x| \leq 1$.

9. Bevisa följande påstående (Viètes sats). Om r_1 och r_2 är rötter till ekvationen $x^2+ax+b = 0$, så gäller: $r_1 + r_2 = -a$, och $r_1 \cdot r_2 = b$.
Lösning: Eftersom r_1 är en rot till polynomet $x^2 + ax + b$, så $x^2 + ax + b = (x - r_1)p_1(x)$ där $p_1(x)$ är en polynom av grad 1. Eftersom r_2 är också en rot, så $x^2 + ax + b = c(x - r_1)(x - r_2)$ för något konstant c. Multiplicera in: $c(x - r_1)(x - r_2) = cx^2 - c(r_1 + r_2)x + cr_1r_2 = 0$. Detta skall jämföras med $x^2 + ax + b = 0$.

Koefficienten framför x^2 är $c = 1$.

Koefficienten framför x är $a = -(r_1 + r_2) \Leftrightarrow r - 1 + r_2 = -a$.

Konstanttermen är $b = r_1r_2$, v.s.b.