KTH, Matematik
Gunnel Roman och Maria Saprykina

Tentamen i SF1659, Matematik Baskurs

Dag och tid: Lördag 18 februari 2012 kl. 9.00–14.00.
Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera. Fullständiga lösningar krävs för full poäng. Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt.
Uppgifterna 1 och 2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j får automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte ska lösas).
Uppgifterna 3–6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter. Uppgifterna 7–9 är lite mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, sk VG-poäng.
Preliminära betygsgränser: A–31 poäng varav minst 8 VG poäng, B–26 poäng varav minst 5 VG poäng, C–21 poäng varav minst 2 VG poäng, D–17, E–15, Fx–13.

1. Lös $|x+2|+|x-3|=5$.
Lösning. Vi har:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{för } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{för } x < -2 \end{cases} \qquad |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{för } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{för } x < 3, \end{cases} \quad .$$

Betrakta tre fall:
I: $x < -2$. Ekvationen har form $-x-2-x+3=5 \Leftrightarrow x=-2$. Detta ligger inte i intervallet $x < -2$. Ingen lösning i detta fall.
II: $-2 \leq x < 3$. Ekvationen har form $x+2-x+3=5 \Leftrightarrow 5=5$. Varje x i intervallet $-2 \leq x < 3$ är en lösning.
III: $x \geq 3$. Ekvationen har form $x+2+x-3=5 \Leftrightarrow x=3$. Detta ligger i intervallet $x \geq 3$, därför är det en lösning.
Svar: $-2 \leq x \leq 3$.

2. Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer:
a). $2^{2x}+2^{x+1}=24$; (2p)
Lösning. $2^{2x}+2^{x+1}=24 \Leftrightarrow (2^x)^2+2\cdot 2^x=24$. Beteckna $y := 2^x$. För y gäller ekvationen: $y^2+2y-24=0$. Rötterna är 4 och -6. $y=2^x=-6$ har ingen lösning. $y=2^x=4$ ger $x=2$.
Svar: $x=2$.

b). $\sqrt{x^2-10}=\sqrt{2x+5}$. (2p)
Lösning. Kvadrera både leden (observera att den nya ekvationen kan ha fler rötter!).

$$x^2-10=2x+5 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0.$$

$x=-3$ eller $x=5$. Verifiera: för $x=-3$, är $\sqrt{x^2-10}$ odefinierad, därför är $x=-3$ ingen rot till den ursprungliga ekvationen. Insättning av $x=5$ ger: $\sqrt{15}=\sqrt{15}$, vilket är sant.

Svar: $x = 5$.

3. Bestäm alla x i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ sådana att $\frac{1}{3}\sin^2 x = \cos^2 \frac{\pi}{3}$.
Lösning. Enligt ovan, $\frac{1}{3}\sin^2 x = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, dvs, $\sin^2 x = \frac{3}{4}$. Vi får två möjligheter:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{eller} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Första fallet ger oss $x = \frac{\pi}{3}$ eller $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Andra fallet ger: $x = -\frac{\pi}{3}$ eller $x = \pi - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3}$.
Svar: Se ovan.

4. Bestäm koefficienten framför den term som inte innehåller x i utvecklingen av

$$\left(\frac{x^8}{a} - \frac{b}{x^6}\right)^{14},$$

där $a \neq 0$ och $b \neq 0$ är reella tal.
Lösning. Enligt binomialsatsen,

$$\left(\frac{x^8}{a} - \frac{b}{x^6}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} \left(\frac{x^8}{a}\right)^k \left(-\frac{b}{x^6}\right)^{14-k}.$$

För varje k ($0 \leq k \leq 14$) blir motsvarande term

$$\binom{14}{k} \frac{x^{8k}}{a^k} \frac{(-b)^{14-k}}{x^{6(14-k)}} = \binom{14}{k} x^{8k-6(14-k)} (-b)^{14-k} a^{-k}.$$

En term "som inte innehåller x" motsvarar k sådan att $8k - 6(14-k) = 0$. Det är $k = 6$. Motsvarande koefficient blir

$$\binom{14}{6}(-b)^{14-6}a^{-6} = \binom{14}{6} b^8 a^{-6} = \frac{14!}{6!8!} b^8 a^{-6} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{6!} b^8 a^{-6} = 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 7 b^8 a^{-6}.$$

Svar: Se ovan.

5. Bestäm alla x som uppfyller olikheten

$$x \geq \frac{3}{x-2}.$$

Lösning. Olikheten ovan är ekvivalent med

$$x - \frac{3}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)-3}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{x-2} \geq 0.$$

Detta är lätt att undersöka mha ett teckentabell.
Svar: $-1 \leq x < 2$ eller $x \geq 3$.

6. Lös ekvationen

$$\frac{1}{2}\ln(5-4x) + \ln x = \ln(2x-1).$$

Lösning. Ekvationen är ekvivalent med $\ln((5-4x)^{\frac{1}{2}}x) = \ln(2x-1)$. Eftersom funktionen $\ln x$ är injektiv, är detta ekvivalent med

$$(5-4x)^{\frac{1}{2}}x = 2x-1.$$

Kvadrerar (OBS att vi måste sedan verifiera lösningarna!)

$$(5-4x)x^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Jag provar heltalsrötter: både $x = 1$ och $x = -1$ är rötter. Därför kan man dela polynomet med $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$. Polynomdivisionen ger kvoten $(4x-1)$. Den tredje roten är $x = \frac{1}{4}$.

Vi måste prova om de rötterna löser den ursprungliga ekvationen. Svar: $x = 1$.

7. Förklara vad som menas med att en funktion är inverterbar. Visa att funktionen $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} + 2,\ x \geq 0$, är inverterbar, och bestäm dess invers.
Lösning. Funktionen $f(x)$ är inverterbar om det för varje y i värdemängden av f finns en enda punkt x i definitionsmängden av f sådan att $f(x) = y$ (med andra ord, det finns en enda lösning till ekvationen $f(x) = y$ för $y \in V_f$). Vi sa också att en sådan funktion är injektiv. I detta fall kan vi definiera inversfunktionen f^{-1} sådan att $f^{-1}(y) = x$.

Fixera ett y, och låt oss lösa ekvationen

$$f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} + 2 = y.$$

Vi har: $\sqrt{\ln(x+1)} = y - 2$. Observera att för $x \geq 0$ har vi: $\ln(x+1) \geq 0$, och VL är definierad och positiv. Denna likhet har mening bara om HL är positiv, dvs, för $y \geq 2$. Ekvationen ovan är ekvivalent med

$$\ln(x+1) = (y-2)^2 \ \Leftrightarrow\ x + 1 = e^{(y-2)^2} \ \Leftrightarrow\ x = e^{(y-2)^2} - 1.$$

För det fixerade x fick vi en entydig lösning x till ekvationen $f(x) = y$. Därför $f^{-1}(y)$ finns, och ges av

$$f^{-1}(y) = e^{(y-2)^2} - 1.$$

8. a) Är det sant att $\ln(x+y) = \ln x \cdot \ln y$ för alla $x > 0$, $y > 0$? Bevisa ditt påstående.
Lösning. Nej. Motexempel: $\ln 2 = \ln(1+1) \neq \ln 1 \cdot \ln 1 = 0$.

b). Är det sant att $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$ för alla $x > 0$, $y > 0$? Bevisa ditt påstående.
Lösning. Nej. Motexempel: $\ln 2 = \ln(1+1) \neq \ln 1 + \ln 1 = 0$.

9. Bevisa att

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Lösning. Betrakta en rät triangel med hypotenusan av längd 1 och en katet av längd x. Låt den närliggande (till denna katet) vinkeln vara α, och den motstående vinkeln vara β. Då har vi: $\cos\alpha = x = \sin\beta$. Observera att $0 < \alpha < \pi/2$ och $0 < \beta < \pi/2$, och $\alpha + \beta = \pi/2$. Därför $\alpha = \arccos x$, $\beta = \arcsin x$. Slutligen, $\arccos x + \arcsin x = \alpha + \beta = \pi/2$.

För $x = 0$ och $x = 1$ verifieras påståendet direkt.