KTH, Matematik
Kristian Bjerklöv, Gunnel Roman
och Maria Saprykina

Lösningsförslag till tentamen i SF1659, Matematik Baskurs, 01-10-2012 .

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera. Fullständiga lösningar krävs för full poäng. Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt.
Uppgifterna 1 och 2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j får automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte behöver lösas).
Uppgifterna 3–6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter. Uppgifterna 7–9 är lite mer avancerade. Den som siktar på betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, sk VG-poäng.
Preliminära betygsgränser: A–31 poäng varav minst 8 VG poäng, B–26 poäng varav minst 5 VG poäng, C–21 poäng varav minst 2 VG poäng, D–17, E–15, Fx–14.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall din kursledare (Kristian Bjerklöv, Gunnel Roman eller Maria Saprykina).
Inga hjälpmedel är tillåtna.

Uppgifter som motsvarar varsin KS

(1) a). Lös olikheten

$$\frac{1}{1-x} > \frac{1}{1+x}.$$

(2p.)

b) Lös ekvationen $|x-2| + 2x = 1$. (2p.)

Lösning: a) Vi har

$$\frac{1}{1-x} > \frac{1}{1+x} \iff \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} > 0.$$

Eftersom

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2x}{(1-x)(1+x)},$$

så kan vi skriva olikheten som

$$\frac{2x}{(1-x)(1+x)} > 0.$$

För att undersöka för vilka x denna olikhet är uppfylld gör nu ett teckenschema:

x		-1		0		1	
$2x$	-		-	0	+		+
$1+x$	-	0	+		+		+
$1-x$	+		+		+	0	-
$\frac{2x}{(1-x)(1+x)}$	+	ej def.	-	0	+	ej def.	-

Från detta följer att olikheten är uppfylld för alla x sådana att $0 < x < 1$ eller $x < -1$.

Svar: För alla x sådana att $0 < x < 1$ eller $x < -1$.

b) Eftersom $x-2$ växlar tecken vid $x = 2$ delar vi upp analysen i följande två fall:
Fall $x \geq 2$. I detta intervall kan ekvationen skrivas (eftersom $|x-2| = x-2$)

$$x - 2 + 2x = 1$$

vilket ger $x = 1$. Observera att $x = 1$ ej uppfyller $x \geq 2$, så det finns inga lösningar i detta fall.

Fall $x < 2$. Här kan ekvationen skrivas (ty $|x-2| = -(x-2)$)

$$-(x-2) + 2x = 1$$

vilket ger $x = -1$. Vi noterar att $x = -1$ liger i det betraktade intervallet.

Sammanfattningsvis har den givna ekvationen den unika lösningen $x = -1$.

Svar: $x = -1$.

(2) a). Lös ekvationen $\sin x + \cos x = 0$. (2p.)

b). Lös ekvationen $e^x - e^{-x} = 6$. (2p.)

Lösning: a) Ekvationen $\sin x + \cos x = 0$ kan skrivas $\sin x = -\cos x$, vilket är uppfyllt precis då

$$\tan x = -1.$$

Vi vet att $\tan(-\pi/4) = -1$, och att funktionen $\tan t$ är monotont växande på intervallet $]-\pi/2, \pi/2[$. Alltså är $x = -1$ den enda lösningen i intervallet $]-\pi/2, \pi/2[$. Vidare vet vi att $\tan t$ är en π-periodisk funktion. Således följer det att alla lösningar till ekvationen är på formen $x = -\pi/4 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Svar: $x = -\pi/4 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

b) Vi har

$$e^x - e^{-x} = 6 \iff e^{2x} - 1 = 6e^x \iff e^{2x} - 6e^x - 1 = 0.$$

Om vi sätter $t = e^x$ får vi andragradsekvationen

$$t^2 - 6t - 1 = 0$$

som har lösningarna $t = 3 + \sqrt{10}$ och $t = 3 - \sqrt{10}$. Eftersom $e^x > 0$ för alla x, och eftersom $3 - \sqrt{10} < 0$, så är den enda möjligheten att

$$e^x = 3 + \sqrt{10}.$$

Detta ger $x = \ln(3 + \sqrt{10})$.

Svar:$x = \ln(3 + \sqrt{10})$.

G–uppgifter

(3) För vilka x gäller olikheten $x^3 + 2x > 3x^2$?

Lösning: Olikheten kan skrivas $x^3 + 2x - 3x^2 > 0$. Det är lätt att se att vi har har faktoriseringen

$$x^3 + 2x - 3x^2 = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2).$$

Vi undersöker när olikheten är uppfylld med hjälp av en teckentabell:

x		0		1		2	
x	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-	0	+
$x(x-1)(x-2)$	-	0	+	0	-	0	+

Från detta följer att olikheten gäller då $0 < x < 1$ eller $x > 2$.

(4) a) Visa att

$$\tan x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}.$$

(2p.)

b) Låt $y = \arctan \frac{1}{2}$. Bestäm $\cos y$. (2p.)

Lösning: a) Med hjälp av de trigonometriska formlerna kan vi skriva

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} = \frac{2\sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

b) Eftersom $\arctan(1/2)$ ligger i intervallet $]0, \pi/2[$ så inför vi en rätvinklig triangel som har en vinkel $\alpha = \arctan(1/2)$, där den motstående katetern har längd 1 och den närliggande katetern längd 2 (så $\tan \alpha = 1/2$). Rita figur! Pytagoras sats ger att hypotenusan har längden $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Från definitionen av $\cos$ följer nu att $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$.

Svar: $\cos y = 2/\sqrt{5}$.

(5) I en geometrisk summa är kvoten 3. Summan består av 10 termer, och produkten av de tre första termerna är 54. Beräkna summan.

Lösning: Eftersom summan är geometrisk, består av 10 termer och har kvoten 3, så måste summan vara på formen

$$a + 3a + a3^2 + \ldots + a3^9.$$

Vi vet att produkten av de tre första termerna ska vara 54, vilket betyder att

$$54 = a(3a)(9a) = 27a^3.$$

Från detta följer att $a = 2^{1/3}$. Använder vi nu formeln för en geometrisk summa får vi

$$a + 3a + a3^2 + \ldots + a3^9 = a\frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 2^{1/3}\frac{3^{10} - 1}{2} = 2^{-2/3}(3^{10} - 1).$$

Svar: Summan är $2^{-2/3}(3^{10} - 1)$.

(6) a) Lös ut y som funktion av x ur formeln

$$\ln(y - 1) - \ln 2 = x + \ln x.$$

(2p.)

b) För vilka x gäller olikheten

$$\ln(x^2 - 2) \leq \ln x \ ?$$

(2p.)

Lösning: a) Vi har

$$\ln(y - 1) - \ln 2 = x + \ln x \Longleftrightarrow \ln(y - 1) - \ln 2 - \ln x = x.$$

Med hjälp av logaritmlagarna kan vi skriva

$$\ln(y - 1) - \ln 2 - \ln x = \ln(y - 1) - (\ln 2 + \ln x) = \ln(y - 1) - \ln 2x = \ln \frac{y - 1}{2x}$$

Sålunda har vi

$$\ln \frac{y - 1}{2x} = x,$$

vilket ger

$$\frac{y - 1}{2x} = e^x.$$

Från detta följer slutligen

$$y = 2xe^x + 1.$$

Svar: $y = 2xe^x + 1$.

b) Vi noterar först att $\ln x$ är definierat för alla $x > 0$ och $\ln(x^2 - 2)$ är definierad för alla x sådana att $x^2 - 2 > 0$, dvs för alla x som uppfyller $|x| > \sqrt{2}$. För att båda dessa villkor ska vara uppfyllda måste vi alltså ha $x > \sqrt{2}$. Det är endast sådana x som vi kan betrakta. Vidare vet vi att funktionen $\ln t$ är växande, dvs $\ln t \leq \ln s \Rightarrow t \leq s$. För att lösa olikheten ska vi alltså hitta alla $x > \sqrt{2}$ sådana att $x^2 - 2 \leq x$.

Olikheten $x^2 - 2 \leq x$ är ekvivalent med $x^2 - 2 - x \leq 0$. Eftersom $x^2 - 2 - x = (x+1)(x-2)$ ser vi (t ex med hjälp av teckentabell) att $x^2 - 2 - x \leq 0$ precis då $x \in [-1, 2]$.

Sammanfattningsvis: olikheten $\ln(x^2 - 2) \leq \ln x$ gäller för alla x sådana att $\sqrt{2} < x \leq 2$.

Svar: Olikheten är uppfyld för alla x sådana att $\sqrt{2} < x \leq 2$.

VG–uppgifter

(7) Låt $f(x) = x \cdot 2^x$. Bestäm tal a och b så att

$$f(x+2) + af(x+1) + bf(x) = 0 \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Lösning: Vi ser att

$$\begin{aligned} f(x+2) + af(x+1) + bf(x) &= (x+2)2^{x+2} + a(x+1)2^{x+1} + bx2^x = \\ &= 4(x+2)2^x + 2a(x+1)2^x + bx2^x = (4(x+2) + 2a(x+1) + bx)2^x. \end{aligned}$$

Eftersom $2^x > 0$ för alla x måste vi alltså hitta a och b så att

$$4(x+2) + 2a(x+1) + bx = 0 \text{ för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Vi har

$$4(x+2) + 2a(x+1) + bx = 4x + 8 + 2ax + 2a + bx = x(4 + 2a + b) + (8 + 2a).$$

För att detta ska vara noll för alla $x \in \mathbb{R}$ måste vi ha $4 + 2a + b = 0$ och $8 + 2a = 0$, dvs $a = -4$ och $b = 4$.

Svar: $a = -4$ och $b = 4$.

(8) Antag att tredjegradsekvationen

$$x^3 + ax + b = 0$$

har en dubbelrot r (dvs $x_1 = x_2 = r$ är rötter). Bestäm den tredje (och sista) roten x_3.

Lösning: Att r är en dubbelrot betyder att tredjegradspolynomet innehåller faktorn

$$(x - r)^2.$$

Vi låter x_3 beteckna den tredje roten. Då har vi faktoriseringen

$$x^3 + ax + b = (x - r)^2(x - x_3) = (x^2 - 2rx + r^2)(x - x_3).$$

VL saknar x^2-termer, och koefficienten framför x^2-termen i HL är $-(2r + x_3)$. Eftersom likhet ska gälla (polynomet i vänsterledet ska vara samma som det i högerledet) måste vi alltså ha $-(2r + x_3) = 0$, dvs $x_3 = -2r$.

Svar: $x_3 = -2r$.

(9) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+x)^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1} \quad \text{för alla } n \geq 1.$$

Tips: Tänk på att summan i vänsterledet är en geometrisk summa.

Lösning: Vi antar först att $x \neq 0$. Eftersom vi har en geometrisk summa i vänsterledet har vi

$$\text{VL} = \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^n - 1}{x}.$$

Enligt binomialsatsen har vi

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

Eftersom $\binom{n}{0} = 1$ har vi

$$(1+x)^n - 1 = \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

Dividerar vi bägge sidor med x får vi

$$\text{VL} = \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}x + \ldots + \binom{n}{n}x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1} = \text{HL}.$$

Om $x = 0$ får vi n i VL och $\binom{n}{1} = n$ i HL, så VL = HL också i detta fall.