KTH, Matematik
Kristian Bjerklöv, Gunnel Roman
och Maria Saprykina

Lösningsförslag till tentamen i SF1659, Matematik Baskurs, 10-01-2013 .

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera. Fullständiga lösningar krävs för full poäng. Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt.
Uppgifterna 1 och 2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänd på kontrollskrivning nummer j får automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte behöver lösas).
Uppgifterna 3–6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter. Uppgifterna 7–9 är lite mer avancerade. Den som siktar på betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, sk VG-poäng.
Preliminära betygsgränser: A–31 poäng varav minst 8 VG poäng, B–26 poäng varav minst 5 VG poäng, C–21 poäng varav minst 2 VG poäng, D–17, E–15, Fx–14.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall din kursledare (Kristian Bjerklöv, Gunnel Roman eller Maria Saprykina).
Inga hjälpmedel är tillåtna.

Uppgifter som motsvarar varsin KS

(1) Lös olikheten

$$x + 1 \leq \frac{2}{x}.$$

Lösning: Vi har

$$x + 1 \leq \frac{2}{x} \iff x + 1 - \frac{2}{x} \leq 0 \iff \frac{x(x+1)}{x} - \frac{2}{x} \leq 0 \iff \frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 0.$$

Eftersom $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, har vi alltså att den ursprungliga olikheten är ekvivalent med

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x} \leq 0.$$

Vi undersöker för vilka x som detta är uppfyllt genom att använda en teckentabell:

x		-2		0		1	
$x+2$	-	0	+		+		+
x	-		-	0	+		+
$x-1$	-		-		-	0	+
$\frac{(x-1)(x+2)}{x}$	-	0	+	$\wr$	-	0	+

Från detta följer att olikheten är uppfylld precis då $x \leq -2$ eller $0 < x \leq 1$.

(2) a). Man vet att $\sin x = \frac{2}{3},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$. Bestäm det exakta värdet av

$$\frac{3\cos x - \cot x}{3\sin x + \tan x}.$$

(3p.)

Lösning: För att beräkna uttrycket behöver vi först veta vad $\cos x$ är. Genom att använda den trigonometriska ettan får vi att $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (2/3)^2 = 5/9$. Eftersom x ligger i intervallet $]0, \pi/2[$ måste $\cos x > 0$. Alltså har vi $\cos x = \sqrt{5}/3$. Genom att använda definitonerna av $\tan x$ och $\cos x$ får vi

$$\frac{3\cos x - \cot x}{3\sin x + \tan x} = \frac{3\cos x - \cos x/\sin x}{3\sin x + \sin x/\cos x} = \frac{5}{4(\sqrt{5}+1)}.$$

b). Lös ekvationen $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (1p.)

Lösning: Ekvationen $\sin t = 1/\sqrt{2}$ har lösningarna $t = \pi/4 + n2\pi$ och $t = 3\pi/4 + n2\pi$. Således får vi två uppsättningar lösningar:

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n2\pi \iff x = n\frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z},$$

och

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + n2\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

G–uppgifter

(3) a). Ett av talen $1, 2$ och -3 är en lösning till ekvationen

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Använd detta för att bestämma ekvationens samtliga lösningar. (2p.)

Lösning: Genom insättning ser vi att $x = -3$ är en rot till ekvationen. Vi utför polynomdivison för att hitta de resterande rötterna. Detta ger oss

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x+3} = x^2 + 3x + 2.$$

Ekvationen $x^2 + 3x + 2 = 0$ har rötterna $x = -1$ och $x = -2$, så vår tredjegradsekvation har rötterna $x = -1, x = -2$ och $x = -3$.

b). Lös olikheten $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 < 0$. (2p.)

Lösning: Från a) följer det att vi har faktoriseringen

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3).$$

Vi undersöker när olikheten $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 < 0$ är uppfylld med hjälp av en teckentabell:

x		-3		-2		-1	
$x+3$	-	0	+		+		+
$x+2$	-		-	0	+		+
$x+1$	-		-		-	0	+
$(x+3)(x+2)(x+1)$	-	0	+	0	-	0	+

Från detta följer att olikheten gäller då $x < -3$ eller $-2 < x < -1$.

(4) a). Man vet att $f(t) = 0.75 \cdot 10^{kt}$, där k är en konstant. Vidare vet vi att $f(2) = 3$. Beräkna $f(3)$. (2p.)

Lösning: Det är givet att $f(2) = 3$, så vi har

$$3 = f(2) = \frac{3}{4} \cdot 10^{2k},$$

vilket ger oss att $10^{2k} = 4$. Eftersom $10^{2k} = (10^k)^2$, och $10^k > 0$, så följer det att $10^k = 2$. Således har vi

$$f(t) = \frac{3}{4} \cdot 10^{kt} = \frac{3}{4} \cdot (10^k)^t = \frac{3}{4} \cdot 2^t.$$

Speciellt ger detta att $f(3) = \frac{3}{4} \cdot 2^3 = 6$.

b). Lös ekvationen (2p.)

$$(\ln x^2)(\ln \sqrt{x}) - \ln \frac{1}{x} = 2.$$

Lösning: Eftersom $\ln t$ endast är definierad för $t > 0$, ser vi att uttrycket i vänsterledet endast är definierat för $x > 0$. För $x > 0$ har vi, genom att utnyttja logaritmlagarna,

$$(\ln x^2)(\ln \sqrt{x}) - \ln \frac{1}{x} = (2 \ln x) \left(\frac{1}{2} \ln x \right) + \ln x = (\ln x)^2 + \ln x.$$

Ekvationen kan således skrivas

$$(\ln x)^2 + \ln x = 2.$$

För att lösa denna ekvation låter vi $u = \ln x$. Då får vi andragradsekvationen $u^2 + u = 2$, som har rötterna $u = 1$ och $u = -2$. För $u = 1$ får vi ekvationen $\ln x = 1$ vilket ger $x = e$; för $u = -2$ får vi ekvationen $\ln x = -2$, så $x = e^{-2}$. Således, ekvationen har lösningarna $x = e$ och $x = e^{-2}$.

(5) Lös ekvationen $\cos 2x = 9\cos x - 5$.

Lösning: Eftersom vi har formeln $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, är ekvationen ekvivalent med

$$2\cos^2 x - 1 = 9\cos x - 5,$$

d v s

$$2\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0.$$

Om vi låter $t = \cos x$ får vi ekvationen $2t^2 - 9t + 4 = 0$, som har rötterna $t = 4$ och $t = 1/2$. Ekvationen $\cos x = 4$ saknar lösningar; ekvationen $\cos x = 1/2$ ger oss $x = \pi/3 + n2\pi$ eller $x = -\pi/3 + n2\pi$, där n är ett heltal.

(6) Vilken är högstagradstermen i $(x^3 - 3)^{16} - (x^4 - 4x)^{12}$?

Lösning: Vi undersöker de bägge polynomen med hjälp av binomialsatsen. Vi får

$$(x^3 - 3)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} x^{3k}(-3)^{16-k}$$

och

$$(x^4 - 4x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{4k}(-4x)^{12-k}.$$

Vi fokuserar på termerna av de hösta graderna i de bägge polynomen:

$$(x^3 - 3)^{16} = (x^3)^{16} + \binom{16}{1}(x^3)^{15}(-3) + \binom{16}{2}(x^3)^{14}(-3^2) + (\text{termer av grad lägre än } 42) =$$
$$= x^{48} - 16 \cdot 3x^{45} + \frac{15 \cdot 16}{2} \cdot 9x^{42} + (\text{termer av grad lägre än } 42),$$

och

$$(x^4 - 4x)^{12} = (x^4)^{12} - \binom{12}{1}(x^4)^{11} \cdot 4x + \binom{12}{2}(x^4)^{10} \cdot (4x)^2 + (\text{termer av grad lägre än } 42) =$$
$$= x^{48} - 4 \cdot 12x^{45} + \frac{11 \cdot 12}{2} \cdot 16x^{42} + (\text{termer av grad lägre än } 42).$$

Eftersom kofficienterna framför x^{48}- och x^{45}-termerna i de bägge polynomen är lika, får vi slutligen

$$(x^3 - 3)^{16} - (x^4 - 4x)^{12} = \left(\frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{2} - \frac{11 \cdot 12 \cdot 16}{2}\right) x^{42} + (\text{termer av grad lägre än } 42) =$$
$$= 24x^{42} + (\text{termer av grad lägre än } 42).$$

Således, högstagradstermen är $24x^{42}$.

VG–uppgifter

(7) Sätt $y = \arctan x$. Visa att $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Lösning: Vi vet att $\tan y = x$. Genom att utveckla högerledet får vi därför

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(\tan y)^2} = \frac{1}{1+(\sin y/\cos y)^2} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \cos^2 y.$$

I det sista steget utnyttjade vi den trigonometriska ettan.

(8) Visa att det går att bestämma a, b, c sådana att för alla reella tal x gäller

$$\sqrt{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1} = |ax^2 + bx + c|.$$

Lösning: Vi kommer ihåg att $\sqrt{u^2} = |u|$ för alla reella tal u. För att det ska vara möjligt att finna a, b, c så att likheten ovan gäller, måste uttrycket under rottecknet gå att skriva på formen $(ax^2+bx+c)^2$. Vi undersöker om så är fallet. Eftersom koefficienten framför x^4-termen är 1, så kan vi ta $a = 1$ (om $a = -1$ kan vi flytta ut minustecknet, som försvinner vid kvadrering). Vi försöker alltså finna b och c så att

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + bx + c)^2.$$

för alla x. Eftersom

$$(x^2 + bx + c)^2 = x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c)x^2 + 2bcx + c^2$$

ser vi att om $b = 3$ och $c = -1$ så gäller likheten, dvs

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + 3x - 1)^2.$$

Således,

$$\sqrt{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1} = \sqrt{(x^2 + 3x - 1)^2} = |x^2 + 3x - 1|.$$

(9) Femte, tretioförsta och sista termen i en aritmetisk summa är $7, \frac{1}{2}$ respektive -8. Bestäm antalet termer och summans värde.

Lösning: Vi låter n beteckna antalet termer i summan. Vi har

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Eftersom summan är aritmetisk så finns det en differens d så att

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d,\ a_4 = a_1 + 3d, \ldots,\ a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Det är givet att $a_5 = 7, a_{31} = 1/2$ och $a_n = -8$. Detta ger oss tre ekvationer

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 7 \\ a_1 + 30d = 1/2 \\ a_1 + (n-1)d = -8. \end{cases}$$

De två första ekvationerna ger oss att $d = -1/4$ och $a_1 = 8$. Om detta insätts i den sista ekvationen (dvs $8 - (n-1)/4 = -8$) får vi $n = 65$. Således vet vi att summan består av 65 termer. Vidare ges summans värde av (enligt formel för artimetisk summa; se sidan 33 i Persson-Böiers)

$$s = n\frac{a_1 + a_n}{2} = 65\frac{8 + (-8)}{2} = 0.$$