KTH, Matematik
Kirsti Mattila, Gunnel Roman
och Maria Saprykina

Lösningsförslag till tentamen i SF1659, Matematik Baskurs
7 oktober 2013

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).

1 a). Lös ekvationen $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x(x-2)}=6.$ (2p.)

Lösning: Observera att ekvationen ovan är endast definierad för $x \neq 0$ och $x \neq 2$. För sådana x är ekvationen ekvivalent med

$$\frac{x-2}{x(x-2)}+\frac{x}{x(x-2)}-\frac{2}{x(x-2)}-\frac{6x(x-2)}{x(x-2)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x-2+x-2-6x(x-2)}{x(x-2)}=0 \Leftrightarrow \frac{-6x^2+14x-4}{x(x-2)}=0.$$

För $x \neq 0$ och $x \neq 2$ är detta ekvivalent med .

$$6x^2-14x+4=0$$

Ekvationen ovan har rötter $x=2$ och $x=\frac{1}{3}$. Roten $x=2$ ligger inte i definitionsmängden av de givna funktionerna.

Svar: $x=\frac{1}{3}$.

b). Lös olikheten $\dfrac{2+2x}{1-x^2} \leq 1.$ (2p.)

Lösning: Olikheten är ekvivalent med

$$\frac{2+2x}{1-x^2}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2+2x-(1-x^2)}{1-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{1-x^2} \leq 0.$$

Eftersom täljaren $(x+1)^2$ alltid är positiv, sammanfaller uttryckets tecken med tecknet av nämnaren (för $x \neq \pm 1$):

$$\frac{(x+1)^2}{1-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow 1-x^2<0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)<0.$$

Den sista olikheten har är uppfylld för $x \in (\infty,-1)$ eller $x \in (1,\infty)$.

Svar: $x \in (\infty,-1)$ eller $x \in (1,\infty)$.

2. Lös ekvationen $\ln x-\ln\dfrac{2}{x}=\ln(x+4).$

Lösning Ekvationen är endast definierad för sådana x att $x>0$, $\frac{2}{x}>0$ samt $(x+4)>0$. De tre villkorna samtidigt gäller för alla $x>0$.

För $x > 0$ är ekvationen ekvivalent med

$$\ln x + \ln \frac{x}{2} = \ln(x+4) \Leftrightarrow \ln \frac{x^2}{2} = \ln(x+4) \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ eller } x = 4.$$

Roten $x = -2$ uppfyller inte villkoret $x > 0$, alltså är det ingen lösning till den ursprungliga ekvationen.

Svar: $x = 4$.

3. Lös ekvationen $|x-1| + 2|x| = 4$.

Lösning: Notera att $|x| = x$ för $x \geq 0$ och $|x| = -x$ för $x < 0$; $|x-1| = x-1$ för $x \geq 1$ och $|x-1| = 1-x$ för $x < 1$. Vi delar analysen i tre fall.

Fall $x < 0$. I detta intervall har ekvationen form

$$1 - x - 2x = 4 \Leftrightarrow x = -1.$$

$x = -1$ ligger i intervallet $x < 0$, alltså är det en lösning.

Fall $0 \leq x < 1$. I detta intervall har ekvationen form

$$1 - x + 2x = 4 \Leftrightarrow x = 3.$$

$x = 3$ ligger inte i intervallet $0 \leq x < 1$, alltså är det ingen lösning.

Fall $x \geq 1$. Ekvationen har form

$$x - 1 + 2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

$x = \frac{5}{3}$ ligger i intervallet $x \geq 1$, alltså är det en lösning.

Svar: $x = -1$ eller $x = \frac{5}{3}$.

4. Lös ekvationen $\sin(2x) = \tan x$.

Lösning: Observera att ekvationen har mening endast då $\cos x \neq 0$, dvs för $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Skriver om ekvationen:

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \sin x \left(2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0.$$

Detta är uppfylld då

$$\sin x = 0 \text{ eller } 2 \cos x - \frac{1}{\cos x} = 0.$$

Ekvationen $\sin x = 0$ har lösningar $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Den andra ekvationen kan skrivas om (för $x \neq \pi/2 + \pi k$) som

$$2 \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ eller } \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ekvationen $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ har två uppsättningar lösningar:
$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ eller $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ekvationen $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ har två uppsättningar lösningar:
$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ eller $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Svar: $x = \pi k$ eller $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ eller $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ där $k \in \mathbb{Z}$.

5a). Beräkna summan (2p.)

$$3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots + 2\cdot 3^{n-1}.$$

Lösning: Summan kan skrivas om som

$$3 + 2\sum_{k=1}^{n-1} 3^k.$$

Beteckna $S = \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$. Vi kan beräkna $(3S - S)$ på två olika sätt: det ena är $(3S - S) = 2S$. Det andra är att utföra substraktionen term-för-term (se boken); då får vi

$$2S = 3^n - 3 \Leftrightarrow S = \frac{3^n - 3}{2}.$$

Vi får:

$$3 + 2\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3 + 2S = 3 + (3^n - 3) = 3^n.$$

b). En följd av positiva tal bildar en geometrisk talföljd. Visa att talens logaritmer (med godtyckligt bas) bildar en aritmetisk talföljd. (2p.)
Lösning: En talföljd $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ är geometrisk om det finns en konstant x sådan att

$$a_1 = xa_0,\ a_2 = xa_1,\ \text{ och } a_n = xa_{n-1} \text{ för alla } n.$$

Det innebär att $\log a_1 = \log(xa_0) = \log x + \log a_0,\ \log a_2 = \log x + \log a_1,$ och $\log a_n = \log x + \log a_{n-1}$ för alla n. Det betyder att

$$\log a_1 - \log a_0 = \log x,\ \log a_2 - \log a_1 = \log x,\ \ldots \log a_n - \log a_{n-1} = \log x \ldots.$$

dvs, talen $\log a_0,\ \log a_1,\ \log a_2, \ldots, \log a_n, \ldots$ bildar en aritmetisk talföljd (med differensen $d = \log x$).

6. Ange alla reella tal x för vilka $\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}x^k = 0$.

Lösning: Enligt binomialsatsen, $\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^k = (1+x)^4$. Alltså

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}x^k = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^k - 1 = (1+x)^4 - 1,$$

och ekvationen ovan kan skrivas om som $(1+x)^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (1+x)^4 = 1$. Denna ekvation har två reella rötter: $(1+x) = 1$ eller $(1+x) = -1$, dvs $x = 0$ eller $x = -2$.

7a). Låt $f(x) = \arcsin x$. Bestäm definitionsmängd och värdemängd för $f(x)$. (2p.)

Lösning: $D_f = [-1, 1]$, $V_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b). Låt $g(x) = \arcsin \frac{x}{1+x}$. Bestäm definitionsmängd för $g(x)$. (2p.)

Lösning: $g(x)$ är definierad endast för de x som uppfyller $-1 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1$.

1). Löser den första olikheten: $\frac{x}{1+x} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{1+x} \geq 0$.

Teckentabellen ger: $x < -1$ eller $x \geq -1/2$.

2). Löser den andra olikheten: $\frac{x}{1+x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{1+x} \leq 0$. Detta gäller då $x+1 > 0$, dvs $x > -1$.

Båda olikheterna är uppfyllda endast för $x \geq -1$.

Svar: $x \geq -1/2$.

8. För vilka reella tal x är

$$\frac{x^2+3}{|x|-5} < 20?$$

Lösning: Ekvationen är ekvivalent med

$$\frac{x^2+3}{|x|-5} - 20 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3-20(|x|-5)}{|x|-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-20|x|+103}{|x|-5} < 0.$$

Låt oss studera täljaren. För $x \geq 0$ är den lika med $x^2 - 20x + 103 = (x-10)^2 + 3$. Detta är positivt för alla tillåtna x. För $x < 0$ är täljaren lika med $x^2 + 20x + 103 = (x+10)^2 + 3$. Detta är positivt för alla tillåtna x.

Alltså, tecken av den ursprungliga olikheten sammanfaller med tecknet av nämnaren $(|x|-5)$. Vi har: $(|x|-5) < 0 \Leftrightarrow |x| < 5 \Leftrightarrow x \in (-5, 5)$.

Svar: $x \in (-5, 5)$.

9. Bestäm alla reella konstanter k sådana att $x^2 + 2kx + 4k^2 - 2k = 0$ har

a) en dubbelrot (två lika rötter);

b) två olika reella rötter, x_1 och x_2;

c) Bestäm därefter (utan att derivera) värdet av k sådan att $|x_1 - x_2|$ blir så stor som möjligt. Ange det maximala värdet.

Lösning PQ-formeln för rötterna ger:

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - (4k^2 - 2k)} = -k \pm \sqrt{-3k^2 + 2k}$$

a). Rötterna är lika precis då $-3k^2 + 2k = 0$, dvs $k = 0$ eller $k = 2/3$.

b). Rötterna $x_{1,2}$ är olika och reella precis då $(-3k^2 + 2k) > 0$, dvs $k \in (0, 2/3)$.

c). I detta fall $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{-3k^2 + 2k}$. Detta värdet är störst för $k = 1/3$. Det maximala värdet av $|x_1 - x_2|$ är $2/\sqrt{3}$.