KTH, Matematik
Kirsti Mattila, Gunnel Roman
och Maria Saprykina

Tentamen i SF1659, Matematik Baskurs
Lösningsförslag

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).

1 a). Lös ekvationen $\sqrt{2x^2-1} = x-2$. (2p.)

Kvadrera bägge leden av ekvationen (observera att att den nya ekvationen är inte ekvivalent med den ursprungliga, utan kan ha fler lösningar).

$$\sqrt{2x^2-1} = x-2 \Rightarrow 2x^2-1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow x=-5 \text{ eller } x=1.$$

Sätter in rötterna i den ursprungliga ekvationen. Ingen av dem ger en sann likhet, allså har den ursprungliga ekvationen inga lösningar.

b). Lös olikheten $\dfrac{3x}{x+4} < 1$. (2p.)

$$\frac{3x}{x+4} < 1 \Leftrightarrow \frac{3x-x-4}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{x+4} < 0$$

Vi gör ett teckentabell:

x		-4		2	
x-2	-		-	0	+
x+4	-	0	+		+
$\frac{2(x-2)}{x+4}$	+	ej def.	-	0	+

Svar: $x \in (-4, 2)$.

2 a). Lös ekvationen $e^{3x} = 3e^x$. (1p.)

Lösning:

$$e^{3x} = 3e^x \Leftrightarrow e^x(e^{2x}-3) = 0 \Leftrightarrow e^{2x}-3=0,$$

eftersom $e^x \neq 0$. Alltså, $2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$.

b). Lös ekvationen $\ln x + 2\ln(x-3) = \ln(4x-12)$. (3p.)

Lösning: Ekvationen är endast definierad för sådana x att $x > 0$ och $(x-3) > 0$. De två villkorna samtidigt gäller för alla $x > 3$.

För $x > 3$ är ekvationen ekvivalent med

$$\ln x(x-3)^2 = \ln(4x-12) \Leftrightarrow x(x-3)^2 = (4x-12);$$

den sista ekvivalensen gäller eftersom funktionen $\ln x$ är injektiv. Den sista ekvationen kan skrivas om:

$$x(x-3)^2 = 4(x-3) \Leftrightarrow (x(x-3)-4)(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x^2-3x-4)(x-3) = 0.$$

Denna ekvation har rötter: $x = -1$, $x = 3$ och $x = 4$. Den enda roten som uppfyller villkoret $x > 3$ är $x = 4$.

Svar: $x = 4$.

3. Lös ekvationen $|2x^2 - 5| = 3x$.

Lösning: Enligt definitionen av absolutbelopp,

$$|2x^2-5| = \begin{cases} 2x^2-5 & \text{då } 2x^2-5 \geq 0, \text{ dvs } x \leq -\sqrt{5/2} \text{ eller } x \geq \sqrt{5/2} \quad \text{(Fall 1)} \\ 5-2x^2 & \text{då } 2x^2-5 < 0, \text{ dvs } -\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2} \quad \text{(Fall 2)} \end{cases}$$

Vi betraktar de två fallen separat.

Fall 1: $x \leq -\sqrt{5/2}$ eller $x \geq \sqrt{5/2}$. Ekvationen har form

$$2x^2 - 5 = 3x \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5/2 \text{ eller } x = -1.$$

Eftersom $5/2 > \sqrt{5/2}$, är $x = 5/2$ en lösning till den ursprungliga ekvationen. Däremot, $-\sqrt{5/2} < -1 < \sqrt{5/2}$, alltså är -1 ingen lösning i detta fall.

Fall 2: $-\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}$. Här blir ekvationen

$$5 - 2x^2 = 3x \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5/2 \text{ eller } x = 1.$$

Eftersom $-\sqrt{5/2} < 1 < \sqrt{5/2}$, så är $x = 1$ en lösning till den ursprungliga ekvationen. Men $-5/2 < -\sqrt{5/2}$ alltså är $-5/2$ ingen lösning.

Svar: $x = 5/2$ eller $x = 1$.

4 a). Beräkna $\sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k}$ (2p.)

Lösning: Enligt binomialsatsen, $\sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} = (1+1)^{11} = 2^{11} = 2048$.

b). Beräkna $\sum_{k=6}^{55} (2k-20)$ (2p.)

Lösning: Beteckna summan för S. Denna summa är aritmetisk eftersom för varje k mellan 6 och 54 har vi:

$$a_{k+1} - a_k = 2(k+1) - 20 - (2k-20) = 2$$

(här a_k betecknar term nummer k i summan ovan). Antal termer i summan är $(55-5) = 50$.

Vi kan beräkna $2S = 50(a_6 + a_{55}) = 50((12-20) + (110-20)) = 2050$.

5 a). Hur många lösningar har ekvationen $\cos x = \dfrac{|x|}{x}$ i intervallet $-10 < x < 10$? (2p.)

Lösning: Per definition,

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{för } x < 0 \\ 1 & \text{för } x > 0 \\ \text{ej def.} & \text{för } x = 0. \end{cases}$$

Betrakta följande fall:

Fall 1: $-10 < x < 0$. Ekvationen blir $\cos x = -1$. Denna har lösningar $x = \pi + 2\pi k$, k heltal. De negativa lösningarna har form $x_1 = -\pi$, $x_2 = -3\pi$, $x_3 = -5\pi$ osv. Observera att $-3\pi > -3 \cdot 3.15 = -9.45 > -10$, alltså både $x = -\pi$ och $x = -3\pi$ ligger i det rätta intervallet. Men $-5\pi < -15 < -10$, alltså ekvationen har inga fler rötter i detta interval.

Fall 2: $0 < x < 10$. Ekvationen blir $\cos x = 1$. Denna har lösningar $x = 2\pi k$, $k \neq 0$ heltal. Vi har: $2\pi \in (0, 10)$, men $2\pi k > 10$ för $k \geq 2$.

Svar: Tre lösningar ($x = 2\pi$, $x = -\pi$ och $x = -3\pi$).

b). Bestäm alla reella tal som uppfyller: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan x > 0$, $|x| < \pi$. (2p.)

Lösning: Ekvationen har två serier av lösningar (k är ett heltal):
1). $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.
2). $2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \pi k$.
De lösningar som uppfyller villkoret $|x| < \pi$ är: $x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ samt $x = 0$.
De första två av tre talen ovan uppfyller dessutom villkoret $\tan x > 0$; den tredje gör inte det.
Svar: $x = \frac{\pi}{4}$ och $-\frac{3\pi}{4}$.

6 a). Härled formeln för den geometriska summan $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

Lösning: Låt $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. Då $q \cdot S = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$, och $S(1-q) = S - qS = 1 - q^{n+1}$. Vi vet att detta är en geometrisk summa, alltså $q \neq 1$. Slutligen,

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

b). Skriv det ändliga decimaltalet $0,1212121212$ som en geometrisk summa och beräkna summan med formeln a).

Lösning:

$$0,1212121212 = \frac{12}{100} + \frac{12}{100^2} + \frac{12}{100^3} + \frac{12}{100^4} + \frac{12}{100^5} =$$
$$\frac{12}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \frac{1}{100^4}\right)$$

Detta är en aritmetisk summa på samma form som ovan, med $q = \frac{1}{100}$. Enligt formeln ovan, är detta lika med

$$\frac{12}{100}\frac{1 - \frac{1}{100^5}}{1 - \frac{1}{100}} = 12\frac{0.9999999999}{99} = 12 \cdot 0.0101010101 = 0.1212121212.$$

7 a). Ange definitions- och värdemängd till funktionen $f(x) = \ln x$. (1p.)

Svar: $D_f = (0, \infty)$, $V_f = (-\infty, \infty)$.

b). För vilka reella tal x gäller olikheten (3p.)

$$\ln(x^2 - 2x) \leq 0 \text{ ?}$$

Lösning: 1). Funktionen ovan är definierad endast för sådana x att $x^2 - 2x > 0$, alltså, för $x \in (-\infty, 0)$ samt $x \in (2, \infty)$.

2). Vidare, för x i de ovannämnda intervaller gäller:

$$\ln(x^2 - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Notera att $1 - \sqrt{2} < 0$, och $2 < 1 + \sqrt{2}$.
De x som uppfyller både villkor 1) och 2) beskrivs av $x \in [1 - \sqrt{2}, 0)$ eller $x \in (2, 1 + \sqrt{2}]$.
Svar: se ovan.

8. Undersök om funktionen f resp., g har invers och bestäm inversen i förekommande fall:
a). $f(x) = x|x|$
b). $g(x) = x + 2|x|$.

Lösning: a).

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{för } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

Om $y = x^2$ samt $x \geq 0$, så $x = \sqrt{y}$ (här $y \geq 0$).
Om $y = -x^2$ samt $x < 0$, så $x = -\sqrt{-y}$ (här $y < 0$).
Alltså, för alla x har ekvationen $y = f(x)$ entydig lösning. Det betyder att f har invers,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{för } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

b). Observera att $g(\frac{1}{3}) = 1 = g(-x)$. Alltså, g är inte injektiv, och har ingen invers.

9. Finns det några värden som funktionen $f(x) = \frac{x^2+9}{2x}$ inte kan anta? Ange alla sådana värden.
Ledning: Sätt $y = f(x)$ och lös ut x.

Lösning: Låt $y = \frac{x^2+9}{2x}$. För $x \neq 0$ är detta ekvivalent med

$$x^2 - 2yx + 9 = 0.$$

Enligt PQ-formeln, har denna ekvation inga lösningar om och endast om $y^2 - 9 < 0$, dvs för $y \in (-3, 3)$. Däremot, om $y^2 - 9 \geq 0$, har ekvationen minst en lösning.
Svar: Funktionen f antar alla värden utom $y \in (-3, 3)$.