Hans Thunberg
KTH Matematik

SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 20 oktober 2011 kl 08.00 – 13.00
Svar och lösningsförslag

(1) Bestäm ekvationen för den cirkel som passerar genom punkten $(1, 4)$ och har sin medelpunkt i $(2, -3)$. Avgör också om punkten $(7, 1)$ ligger inuti, på eller utanför denna cirkel.

Lösning. Den sökta cirkelns radie r ges av avståndet mellan den givna medelpunkten $(2, -3)$ och den givna punkten $(1, 4)$ på cirkeln. Enligt avståndsformeln i planet fås

$$r^2 = (2-1)^2 + (-3-4)^2 = 1 + 49 = 50.$$

En cirkel med medelpunkt (a, b) och radie R består av alla punkter (x, y) som uppfyller ekvationen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, så den sökta cirkeln har ekvation

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 50.$$

Slutligen undersöker vi hur punkten $(7, 1)$ ligger i förhållande till cirkeln. Denna punkts avstånd d till cirkelns medelpunkt ges av

$$d^2 = (7-2)^2 + (1+3)^2 = 25 + 16 = 41.$$

Eftersom d är mindre än cirkelns radie r ligger punkten $(7, 1)$ inuti i cirkeln.

Svar. Sökt cirkels ekvation: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$. Punkten $(7, 1)$ ligger inuti i cirkeln.

---

(2) Lös ekvationen $\sqrt[4]{x+2} = \sqrt{x}$.

Lösning.

$$\sqrt[4]{x+2} = \sqrt{x} \implies \left((x+2)^{1/4}\right)^4 = \left((x)^{1/2}\right)^4 \iff x+2 = x^2 \iff$$
$$x^2 - x = 2 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \iff$$
$$x = 2 \vee x = -1.$$

Alltså: $\sqrt[4]{x+2} = \sqrt{x} \implies x = 2 \vee x = -1$, men inte omvänt. Prövning är därför nödvändig.
För $x = 2$ fås $\text{V. L.} = \sqrt[4]{2+2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} = \text{H. L.}$
För $x = -1$ fås $\text{V. L.} = \sqrt[4]{-1+2} = \sqrt[4]{1} = 1 \neq \sqrt{-1} = \text{H. L.}$

Svar. $x = 2$.

---

(3) Förenkla följande uttryck så långt det går

$$\frac{\ln\sqrt{8a}+\ln\sqrt{32a^3}}{\ln(4a^2)}, \quad a>0.$$

Lösning.

$$\frac{\ln\sqrt{8a}+\ln\sqrt{32a^3}}{\ln(4a^2)} = \frac{\ln\left(\sqrt{8a}\sqrt{32a^3}\right)}{\ln(4a^2)} = \frac{\ln\sqrt{2^3a\cdot 2^5a^3}}{\ln(4a^2)} = \frac{\ln\sqrt{2^8a^4}}{\ln(4a^2)}$$
$$= \frac{\ln\left(2^4a^2\right)}{\ln(4a^2)} = \frac{\ln(4a)^2}{\ln(2a)^2} = \frac{2\ln(4a)}{2\ln(2a)} = \frac{\ln(4a)}{\ln(2a)}$$

Svar. $\dfrac{\ln(4a)}{\ln(2a)}$.

---

(4) De naturliga talen a och b ges i bas 3 av $a=(11)_3$ och $b=(21)_3$. Beräkna produkten ab. Svaret skall uttryckas i bas 3.

Lösning. Som vanligt är tal uttryckta i bas 10 om inget anges, dvs om d_1 och d_2 är någon av siffersymbolerna $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ så är

$$d_1d_2=(d_1d_2)_{10}=d_1\cdot 10+d_2.$$

Vi har att

$$(11)_3=1\cdot 3+1=4 \quad \text{och} \quad (21)_3=2\cdot 3+1=7.$$

Alltså är $a\cdot b=4\cdot 7=28=1\cdot 3^3+0\cdot 3^2+0\cdot 3^1+1\cdot 3^0=(1001)_3$

Svar. $(1001)_3$

---

(5) a) Beräkna den geometriska serien $S = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} + \dots$. (2p)

b) Låt S_n vara den geometriska summan $S_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \dots + \dfrac{2}{3^n}$. Vilket är det minsta värde på n som gör att $|S - S_n| < \dfrac{1}{100}$? (2p)

Lösning. a) En geometrisk serie med kvot k, $|k| < 1$, och första term a har summa $\dfrac{a}{1-k}$. Den givna serien S har första term $\dfrac{2}{3}$ och kvot $\dfrac{1}{3}$ så

$$S = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1.$$

b) En geometrisk summa med n termer, första term a och kvot $k \neq 1$ har summa

$$a\frac{1-k^n}{1-k}.$$

Den givna summan S_n kan skrivas

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

och är således en geometrisk summa med n st termer, första term $\dfrac{2}{3}$ och kvot $\dfrac{1}{3}$. Följaktligen är

$$S_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Vi får då att

$$|S - S_n| = \left|1 - \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n\right| = \frac{1}{3^n}.$$

Det minsta positiva heltal n som ger $|S - S_n| < \dfrac{1}{100}$ är alltså den minsta postiva heltalslösningen till

$$\frac{1}{3^n} < \frac{1}{100} \iff 3^n > 100.$$

Eftersom $3^4 = 81$ och $3^5 = 243$ är det sökta värdet $n = 5$.

Svar. a) 1. b) $n = 5$.

(6) Bestäm genom linjär approximation ett närmevärde till $\sqrt{26}$.

Lösning. Vi väljer $f(x) = \sqrt{x}$ och gör linjär approximationen kring punkten $x = 25$. Vi har att $f(25) = \sqrt{25} = 5$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ och $f'(25) = \dfrac{1}{2\sqrt{25}} = \dfrac{1}{10}$. Alltså är

$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} \approx f(25) + f'(25) \cdot 1 = 5 + \frac{1}{10} = 5.1.$$

Svar. a) 5.1 .

---

(7) a) Bevisa att $\cos^2 v = \dfrac{1+\cos 2v}{2}$. (2p)

Du får använda dig av additionsformlerna för sinus och cosinus och av "trigonometriska ettan" utan att bevisa dessa. Eventuella övriga formler du använder i resonemanget skall bevisas.

b) Visa att $\cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$ och att $\sin\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$. (2p)

Lösning. a) Additionsformeln för cosinus, $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$, och trigonometriska ettan, $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, ger

$$\cos 2v = \cos(v+v) = \cos^2 v - \sin^2 v = \cos^2 v - (1 - \cos^2 v) = 2\cos^2 v - 1.$$

Ur ytterleden får vi

$$\cos 2v = 2\cos^2 v - 1 \iff \cos 2v + 1 = 2\cos^2 v \iff \cos^2 v = \frac{1+\cos 2v}{2}, \quad \text{Q.E.D.}$$

b) Om vi tillämpar $\cos^2 v = \dfrac{1+\cos 2v}{2}$ med $v = \pi/8$ får vi

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$$

Eftersom $0 < \pi/8 < \pi/2$ är $\cos(\pi/8) > 0$ och det följer att

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}.$$

Trigonometriska ettan ger att

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \left(\sqrt{2}+1\right)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Eftersom sinusfunktionen är positiv på intervallet $(0, \pi)$ följer att

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}, \quad \text{Q.E.D.}$$

(8) Bestäm alla komplexa tal z sådana att

$$\frac{1}{z^{12}} + 4\frac{1}{z^6} + 6 + 4z^6 + z^{12} = 0.$$

Förenkla svaret så långt som möjligt.

Lösning. Enligt binomialsatsen är

$$(\frac{1}{x} + x)^4 = \frac{1}{x^4} + 4\frac{1}{x^3}x + 6\frac{1}{x^2}x^2 + 4\frac{1}{x}x^3 + x^4 = \frac{1}{x^4} + 4\frac{1}{x^2} + 6 + 4x^2 + x^4.$$

Om vi tillämpar detta med $x = z^3$ får vi

$$\frac{1}{z^{12}} + 4\frac{1}{z^6} + 6 + 4z^6 + z^{12} = \left(\frac{1}{z^3} + z^3\right)^4$$

så

$$\frac{1}{z^{12}} + 4\frac{1}{z^6} + 6 + 4z^6 + z^{12} = 0 \iff \left(\frac{1}{z^3} + z^3\right)^4 = 0 \iff z^3 = -\frac{1}{z^3} \iff z^6 = -1.$$

Den sista ekvationen löser vi genom att gå över till polär form. Ansått

$$z = r\left(\cos v + i \sin v\right) \implies z^6 = r^6\left(\cos 6v + i \sin 6v\right)$$

där implikationen följer av de Moivres formel. Eftersom $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ får vi

$$z^6 = -1 \iff r^6\left(\cos 6v + i \sin 6v\right) = \cos\pi + i\sin\pi,$$

vilket i sin tur är ekvivalent med att

$$r^6 = 1, 6v = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff r = 1, v = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Detta ger sex olika lösningar z_n svarande mot $v = \dfrac{\pi}{6} + n\dfrac{\pi}{3}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, & z_1 &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,\\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, & z_3 &= \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\\
z_4 &= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i, & z_5 &= \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

Svar. Ekvationen har sex lösningar $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$, $z_1 = i$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$, $z_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$, $z_4 = -i$ och $z_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

(9) Bevisa att talet $\sqrt{7}$ är ett irrationellt tal.

I beviset får du använda följande hjälpsats: Om ett primtal p delar produkten ab, där a och b är positiva heltal, måste p dela antingen a eller b.

Lösning. Vi antar motsatsen, dvs att $\sqrt{7}$ är ett rationellt tal och visar att det leder till en motsägelse. Det följer då att antagandet är felaktigt, och följaktligen att $\sqrt{7}$ ett irrationellt tal.

Antag alltså att $\sqrt{7}$ är ett rationellt tal. Det betyder att det finns positiva heltal p och q med $\mathrm{SGD}(p, q) = 1$ sådana att $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 7$. (Genom att förkorta bort eventeulla gemensamma faktorer kan ett rationellt tal alltid skrivas på en form där täljare och nämnare saknar gemensamma faktorer, dvs vi kan utgå ifrån att $\mathrm{SGD}(p, q) = 1$.)

Eftersom

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 7 \iff p^2 = 7q^2$$

följer då att p^2 är delbart med 7, och enligt hjälpsatsen måste då också 7 dela p, så vi kan skriva $p = 7n$ för något naturligt tal n. Vi får då att

$$(7n)^2 = 7q^2 \iff 7n^2 = q^2,$$

vilket i sin tur innebär att q^2 är delbart med 7 och, enligt hjälpsatsen, är då även q delbart med 7. Men då har p och q den gemensamma faktorn 7, vilket motsäger att $\mathrm{SGD}(p, q) = 1$.

Antagandet att $\sqrt{7}$ är ett rationellt tal leder till en motsägelse och är följaktligen felaktig, alltså är $\sqrt{7}$ ett irrationellt tal.