SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 20 oktober 2011 kl 08.00 – 13.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del II och de tre sista uppgifterna del III, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del I

(1) Bestäm ekvationen för den cirkel som passerar genom punkten $(1, 4)$ och har sin medelpunkt i $(2, -3)$. Avgör också om punkten $(7, -2)$ ligger inuti, på eller utanför denna cirkel.

(2) Lös ekvationen $\sqrt[4]{x+2} = \sqrt{x}$

(3) Förenkla följande uttryck så långt det går

$$\frac{\ln\sqrt{8a} + \ln\sqrt{32a^3}}{\ln(4a^2)}, \quad a > 0.$$

Del II

(4) De naturliga talen a och b ges i bas 3 av $a = (11)_3$ och $b = (21)_3$. Beräkna produkten ab. Svaret skall uttryckas i bas 3.

(5) a) Beräkna den geometriska serien $S = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots$. (2p)

b) Låt S_n vara den geometriska summan $S_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \dots \frac{2}{3^n}$. Vilket är det minsta värde på n som gör att $|S - S_n| < \frac{1}{100}$? (2p)

(6) Bestäm genom linjär approximation ett närmevärde till $\sqrt{26}$.

Del III

(7) a) Bevisa att $\cos^2 v = \frac{1 + \cos 2v}{2}$. (2p)

Du får använda dig av additionsformlerna för de sinus och cosinus och av ”trigonometriska ettan” utan att bevisa dessa. Eventuella övriga formler du använder i resonemanget skall bevisas.

b) Visa att $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$ och att $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$. (2p)

(8) Bestämma alla komplexa tal z sådana att

$$\frac{1}{z^{12}} + 4\frac{1}{z^6} + 6 + 4z^6 + z^{12} = 0.$$

(9) Bevisa att talet $\sqrt{7}$ är ett irrationellt tal.

I beviset får du använda följande hjälpsats: Om ett primtal p delar produkten ab, där a och b är positiva heltal, måste p dela antingen a eller b.
