KTH Teknikvetenskap

SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 10 januari 2013 kl 14.00 – 19.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II, och och de tre sista uppgifterna utgör del III, som främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del I

(1) Det naturliga talet m ges i bas 5 av $m = (2013)_5$. Uttryck m i bas 10.
Det naturliga talet n ges i bas 10 av $n = (2013)_{10}$. Uttryck n i bas 5.

(2) Beräkna och förenkla uttrycket

$$\binom{101}{99} + \binom{101}{100} + \binom{102}{100}.$$

(3) Betrakta ekvationen

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7.$$

Bestäm konstanter a och b samt nya variabler $t = t(x)$ och $s = s(y)$ så att ekvationen får formen $s = at^3 + bt$.

Del II

(4) Sök alla reella lösningar till följande olikheter

a) $|x - 3| > |x| + 3$ (2 p)

b) $2 < |x - 3| < 4$ (2 p)

(5) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sin 2x = \cos x$.

(6) Bevisa eller motbevisa följande påståenden.

a) $\ln x \cdot \ln y = \ln(x + y)$, för alla $x > 0, y > 0$. (2 p)

b) $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$, för alla $x > 0, y > 0$. (2 p)

Du får använda potenslagarna och exponentialfunktionens egenskaper utan att bevisa dessa när du löser denna uppgift.

Del III

(7) Bestäm alla komplexa tal z som uppfyller ekvationen

$$(z+1)^4 = -4.$$

(8) Låt $f(x)$ vara den funktion som är definierad för $x \geq 0$ och ges av att

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt.$$

a) Visa att f är en inverterbar funktion. (2 p)

b) Bestäm värdemängden till f. (1 p)

c) Bestäm ett approximativt värde till $\int_{2.0}^{2.1} \sqrt{1+t^3}\,dt$. (1 p)

(9) Som bekant *definieras* kvoten av två rationella tal $\frac{p}{q}$ och $\frac{r}{s}$, där p, q, r och s är heltal och $q, r, s \neq 0$, genom

$$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} \overset{\text{definition}}{=} \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}.$$

a) Förklara varför man har valt att göra denna definition. (2 p)

Tips: En förklaring är att den generaliserar en viktig egenskap hos kvoter av heltal.

b) Av definitionen följer att kvoten att av två rationella tal är ett nytt rationellt tal. Men vad kan man säga om kvoten

$$\frac{\frac{p}{q}}{t}$$

mellan ett rationellt tal $\frac{p}{q}$ och ett ickerationellt tal $t \neq 0$? Formulera och bevisa ett påstående som besvarar frågan. (2 p)