Tentamen: Lösningsförslag

Onsdag 15 mars 2017 08:00-13:00
SF1674 Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - x^3y^3 + y^2}{x^2+y^2}.$$

Lösning: Vi har
$$\frac{x^2 - x^3y^3 + y^2}{x^2+y^2} = 1 - \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}.$$
Med hjälp av polära koordinater $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ser vi att
$$\left|\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^6\cos^3\varphi\sin^3\varphi}{r^2}\right| = r^4\big|\cos^3\varphi\sin^3\varphi\big| \le r^4 \to 0 \quad \text{då} \quad r \to 0.$$
Det följer att
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - x^3y^3 + y^2}{x^2+y^2} = 1 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 1.$$

Svar: Gränsvärdet existerar och är lika med 1.

2. (4 poäng) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $4z^3 - 5xy + 2xz = 1$ i punkten $(1,1,1)$.

Lösning: Eftersom ytan kan uttryckas som nivåytan $F = 1$ till funktionen $F(x,y,z) = 4z^3 - 5xy + 2xz$, så är gradienten $\nabla F(1,1,1)$ normal till tangentplanet. Det följer att ekvationen för tangentplanet i $(1,1,1)$ ges av
$$((x,y,z) - (1,1,1)) \cdot \nabla F(1,1,1) = 0.$$
Vi beräknar
$$\nabla F(x,y,z) = (-5y + 2z, -5x, 12z^2 + 2x),$$
vilket ger $\nabla F(1,1,1) = (-3,-5,14)$. Således är tangentplanets ekvation
$$(x-1, y-1, z-1)\cdot(-3,-5,14) = 0 \quad \text{dvs} \quad -3(x-1) - 5(y-1) + 14(z-1) = 0.$$
Förenkling ger ekvationen
$$-3x - 5y + 14z = 6.$$

Svar: $-3x - 5y + 14z = 6$

3. (4 poäng) Beräkna

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-r}}{r} dxdydz$$

där $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Lösning: Detta är uppgift 7.15 i övningsboken. Med hjälp av sfäriska koordinater finner vi

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-r}}{r} dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-r}}{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-r}}{r} r^2 dr\right) \\
&= 2\pi[-\cos\theta]_0^{\pi}\left(\int_0^{\infty} re^{-r} dr\right) \\
&= 4\pi\left([r(-e^{-r})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-r}) dr\right) = 4\pi.
\end{aligned}$$

Svar: 4π

4. (4 poäng) Betrakta den plana kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

där $a > 0$ är en konstant. [Detta är en så kallad *cykloid*: $\mathbf{r}(t)$ beskriver kurvan som en fix punkt på en cirkel av radie a följer när cirkeln rullar längs x-axeln.] Bestäm längden L av den del av kurvan som svarar mot parameterintervallet $0 \le t \le \pi$.

Lösning: Den sökta längden ges av

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{\pi} |(a(1-\cos t), a\sin t)| dt = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} dt \\
&= a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos t} dt \\
&= a\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)} dt = 2a\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2} dt \\
&= 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 4a.
\end{aligned}$$

Svar: $L = 4a$

5. (4 poäng) För vilka reella tal α konvergerar

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^{\alpha}}?$$

Vad är integralens värde i de fall som den konvergerar?

Lösning: Detta är uppgift 6.36 i övningsboken. I polära koordinater kan integralen skrivas

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+r^2)^{\alpha}} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} r(1+r^2)^{-\alpha} dr.$$

Eftersom $r(1+r^2)^{-\alpha} = r^{1-2\alpha}(1+O(r^{-2}))$ då $r \to \infty$, följer att integralen i högerledet konvergerar om och endast om $1-2\alpha < -1$, dvs om och endast om $\alpha > 1$. För $\alpha > 1$ är integralens värde

$$2\pi\left[\frac{(1+r^2)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{\alpha-1}.$$

Svar: Integralen konvergerar för $\alpha > 1$ (och divergerar för $\alpha \geq 1$). För $\alpha > 1$ är integralens värde $\frac{\pi}{\alpha-1}$.

6. (4 poäng) Funktionerna $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ges av

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \quad \text{och} \quad g(x,y,z) = e^x - e^y - z^4.$$

(a) Visa att ekvationerna $f(x,y,z) = 9/4$ och $g(x,y,z) = -1/16$ entydigt definierar $y = y(x)$ och $z = z(x)$ som funktioner av x nära punkten $(x,y,z) = (1,1,1/2)$.

Lösning: Derivering av

$$f(x,y(x),z(x)) = \frac{9}{4}, \qquad g(x,y(x),z(x)) = -\frac{1}{16},$$

ger ekvationerna

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Om

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0,$$

så har detta ekvationssystemet en entydig lösning given av

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

I vårt fall har vi

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z), \qquad \nabla g = (e^x, -e^y, -4z^3),$$

$$(\nabla f)(1,1,1/2) = (2,2,1), \qquad (\nabla g)(1,1,1/2) = (e,-e,-1/2). \tag{2}$$

Det följer att

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)=(1,1,1/2)} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -e & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = e - 1 \neq 0,$$

vilket enligt implicita funktionssatsen innebär att $y = y(x)$ och $z = z(x)$ är entydigt definierade nära punkten $(x,y,z) = (1,1,1/2)$

(b) Beräkna $\dfrac{dy}{dx}$ och $\dfrac{dz}{dx}$ i punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$.

Lösning: Ekvationerna (1) och (2) ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)=(1,1,1/2)} &= -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -e & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{e-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ e & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e+1}{e-1} \\ \frac{4e}{1-e} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: I punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$ är $\frac{dy}{dx} = \frac{e+1}{e-1}$ och $\frac{dz}{dx} = \frac{4e}{1-e}$.

7. (4 poäng) Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_{\partial D} (-xy^2 dx + 2xy dy)$$

där $D \subset \mathbb{R}^2$ är triangeln med hörn i punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 0)$.

Lösning: Greens formel ger

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(-xy^2) \right) dxdy = \iint_D (2y + 2xy) dxdy.$$

Eftersom

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 1, y - 1 \le x \le 1 - y\}$$

finner vi

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (2y + 2xy) dxdy &= \int_0^1 \left[2yx + x^2 y\right]_{x=y-1}^{1-y} dy \\ &= \int_0^1 \left(2y(1-y) + (1-y)^2 y - (2y(y-1) + (y-1)^2 y)\right) dy \\ &= \int_0^1 4y(1-y) dy = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Svar: 2/3

8. (4 poäng) Beräkna integralen

$$J = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$

där Y är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ för vilken $z \ge 0$, vektorfältet $\mathbf{F}$ är definierat av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(y^2 \cos(xz), x^3 e^{yz^2}, 1 - \sin(yz)\right),$$

och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen.

Lösning: Stokes sats ger

$$J = \int_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där randen ∂Y är cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ i xy-planet orienterad moturs. Vi har $\partial D = \partial Y$ där D är disken med radie 4 i xy-planet centrerad i origo, dvs

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 16, z = 0\}.$$

Ytterligare en applikation av Stokes sats ger därför

$$\begin{aligned}
J &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) dx dy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, 0) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, 0) \right) dx dy \\
&= \iint_D (3x^2 - 2y) dx dy = \iint_D 3x^2 dx dy \\
&= \frac{3}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^4 r^3 dr d\varphi \\
&= 3\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^4 = 192\pi.
\end{aligned}$$

[Alternativt kan vi beräkna kurvintegralen längs ∂Y direkt med hjälp av parametriseringen

$$\partial Y: \ (4\cos t, 4\sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

vilket ger samma svar även om räkningen blir något längre:

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(4\cos t, 4\sin t, 0) \cdot (-4\sin t, 4\cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (16\sin^2 t, 64\cos^3 t, 1) \cdot (-4\sin t, 4\cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-64\sin^3 t + 256\cos^4 t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} 256\cos^4(t) dt \\
&= 256 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \cos^2 t \sin^2 t) dt \\
&= 256 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{4} \right) dt \\
&= 256 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} - \frac{1 - \cos(4t)}{8} \right) dt \\
&= 256 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{8} + \frac{\sin 4t}{2} \right]_0^{2\pi} \\
&= 256 \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = 192\pi.]
\end{aligned}$$

Svar: 192π

9. (4 poäng) En vätska har densitet $\rho_0 = 2$ kg/m^3 och hastighetsfält

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(-xz, \frac{xy}{2}, \frac{z^2}{2} \right) \text{ m/s}.$$

Beräkna hur stor massa som strömmar ut ur kroppen $K \subset \mathbb{R}^3$ per sekund, där

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 4, 4x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Lösning: Med hjälp av divergenssatsen ser vi att det sökta massflödet Φ ges as

$$\Phi = \iint_{\partial K} \rho_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) dxdydz.$$

Eftersom

$$\operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = \operatorname{div}(-2xz, xy, z^2) = -2z + x + 2z = x,$$

finner vi

$$\Phi = \iiint_K x dxdydz.$$

Projektionen $D \in \mathbb{R}^2$ av kroppen K på xy-planet är en fjärdedels ellips:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, 4x^2 + y^2 \leq 16\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\sqrt{4 - x^2}\}. \end{aligned}$$

Kroppen K består av alla punkter ovanför D som ligger över planet $z = 0$ och under planet $z = 4 - y$. Alltså finner vi

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_D \left(\int_0^{4-y} x dz \right) dxdy = \iint_D x(4 - y) dxdy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} x(4 - y) dydx = \int_0^2 \left[4xy - \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{2\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 \left(8x\sqrt{4 - x^2} - 2x(4 - x^2) \right) dx \\ &= \left[-\frac{8}{3}(4 - x^2)^{3/2} - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right]_0^2 \\ &= \left(0 - 4 \cdot 2^2 + \frac{2^4}{2} \right) - \left(-\frac{8}{3} 4^{3/2} - 0 + 0 \right) \\ &= -16 + 8 + \frac{64}{3} = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Svar: 40/3 kg/s

10. (4 poäng) Betrakta ett plan med elektrisk potential

$$V(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y).$$

Vi vill placera ut två punkter $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ och $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ på avstånd $2\sqrt{2}$ från varandra så att spänningen mellan dem

$$V(x_1, y_1) - V(x_2, y_2)$$

blir så stor som möjligt. Var ska de placeras? Var noga med att visa att din lösning ger ett globalt och inte bara ett lokalt maximum.

Lösning: Vi vill optimera funktionen $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ definierad av

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1,x_2,y_2) &= V(x_1,y_1)-V(x_2,y_2)\\ &= \arctan x_1+\arctan y_1-\arctan x_2-\arctan y_2 \end{aligned}$$

under bivillkoret

$$g(x_1,y_1,x_2,y_2)=8, \tag{3}$$

där

$$g(x_1,y_1,x_2,y_2)=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Eftersom

$$\nabla f=\left(\frac{1}{1+x_1^2},\frac{1}{1+y_1^2},-\frac{1}{1+x_2^2},-\frac{1}{1+y_2^2}\right)$$

och

$$\nabla g=2(x_1-x_2,y_1-y_2,x_2-x_1,y_2-y_1),$$

kan Lagranges ekvation $\nabla f=\lambda\nabla g$ skrivas

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x_1^2}=2\lambda(x_1-x_2),\\ \frac{1}{1+y_1^2}=2\lambda(y_1-y_2),\\ -\frac{1}{1+x_2^2}=2\lambda(x_2-x_1),\\ -\frac{1}{1+y_2^2}=2\lambda(y_2-y_1). \end{cases}$$

Genom att eliminera λ finner vi att varje lokal extrempunkt är en lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1+x_1^2)(x_1-x_2)=(1+y_1^2)(y_1-y_2),\\ (1+x_1^2)(x_1-x_2)=(1+x_2^2)(x_1-x_2),\\ (1+y_1^2)(y_1-y_2)=(1+y_2^2)(y_1-y_2). \end{cases} \tag{4}$$

Om $x_1=x_2$ eller $y_1=y_2$ så ger första ekvationen i (4) att $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, vilket bryter mot bivillkoret. Vi kan därför anta att $x_1\neq x_2$ och $y_1\neq y_2$. De två sista ekvationerna i (4) ger då att $(x_2,y_2)=-(x_1,y_1)$ vilket innebär att första ekvationen kan skrivas

$$2x_1+2x_1^3=2y_1+2y_1^3. \tag{5}$$

Funktionen $t\mapsto 2t+2t^3$ är strängt växande (den har strängt positiv derivata) och är därmed injektiv. Det följer att $x_1=y_1$ är enda lösningen till (5). Alltså har vi följande lösningar av systemet (4) kvar:

$$(x_1,y_1,x_2,y_2)=(x_1,x_1,-x_1,-x_1),\qquad x_1\in\mathbb{R}.$$

Insättning i bivillkoret (3) ger $x_1^2=1$, vilket ger två möjliga lokala extrempunkter:

$$(x_1,y_1)=-(x_2,y_2)=(1,1)\quad\text{eller}\quad(x_1,y_1)=-(x_2,y_2)=(-1,-1).$$

Vi har

$$f(1,1,-1,-1)=4\arctan(1)=4\frac{\pi}{4}=\pi,$$

$$f(-1,-1,1,1) = 4\arctan(-1) = -4\frac{\pi}{4} = -\pi.$$

Det återstår att visa att dessa värden även är globala extremvärden. Vi kommer visa att det finns en radie $R > 0$ sådan att $|f(\mathbf{x})| \leq 3$ för alla punkter $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ med $|\mathbf{x}| > 4R$ som uppfyller bivillkoret. Om $|\mathbf{x}| > 4R$, så gäller att åtminstone en av koordinaterna x_1, y_1, x_2, y_2 har absolutbelopp större än R. Låt oss anta att $x_1 > R$; samma argument fungerar också i övriga fall. Eftersom

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \leq 1,$$

så ger medelvärdessatsen att

$$|\arctan s - \arctan t| \leq \frac{|s-t|}{1+s^2}, \qquad 0 < s < t < \infty,$$

och att

$$\sup_{\substack{y_1,y_2\in\mathbb{R}\\ |y_1-y_2|\leq 2\sqrt{2}}} |\arctan y_1 - \arctan y_2| \leq 2\sqrt{2}.$$

Om punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) ligger på avstånd $2\sqrt{2}$ från varandra och $x_1 > R$, så följer att

$$\begin{aligned} |f(x_1,y_1,x_2,y_2)| &\leq |\arctan x_1 - \arctan x_2| + |\arctan y_1 - \arctan y_2| \\ &\leq \frac{|x_2 - x_1|}{1+\min(x_1,x_2)^2} + \sup_{\substack{y_1,y_2\in\mathbb{R}\\ |y_1-y_2|\leq 2\sqrt{2}}} |\arctan y_1 - \arctan y_2| \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}}{1+(R-2\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Påståendet följer eftersom $2\sqrt{2} < 3$ och vi kan göra den första termen på högersidan godtyckligt liten genom att välja radien R tillräckligt stor. Alltså är π och $-\pi$ de globala max och min värdena för f på $\mathbb{R}^4$.
Svar: Punkterna ska placeras i $(1,1)$ och $(-1,-1)$.