

Tentamen

Onsdag 15 mars 2017 08:00-13:00

SF1674 Flervariabelanalys

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - x^3y^3 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

2. (4 poäng) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $4z^3 - 5xy + 2xz = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$.

3. (4 poäng) Beräkna

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-r}}{r} dx dy dz$$

där $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

4. (4 poäng) Betrakta den plana kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

där $a > 0$ är en konstant. [Detta är en så kallad *cykloid*: $\mathbf{r}(t)$ beskriver kurvan som en fix punkt på en cirkel av radie a följer när cirkeln rullar längs x -axeln.] Bestäm längden L av den del av kurvan som svarar mot parameterintervallet $0 \leq t \leq \pi$.

5. (4 poäng) För vilka reella tal α konvergerar

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}?$$

Vad är integralens värde i de fall som den konvergerar?

6. (4 poäng) Funktionerna $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ges av

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{och} \quad g(x, y, z) = e^x - e^y - z^4.$$

(a) Visa att ekvationerna $f(x, y, z) = 9/4$ och $g(x, y, z) = -1/16$ entydigt definierar $y = y(x)$ och $z = z(x)$ som funktioner av x nära punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$.

(b) Beräkna $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{dz}{dx}$ i punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$.

7. (4 poäng) Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_{\partial D} (-xy^2 dx + 2xy dy)$$

där $D \subset \mathbb{R}^2$ är triangeln med hörn i punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 0)$.

8. (4 poäng) Beräkna integralen

$$J = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$

där Y är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ för vilken $z \geq 0$, vektorfältet $\mathbf{F}$ är definierat av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \cos(xz), x^3 e^{yz^2}, 1 - \sin(yz)),$$

och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen.

9. (4 poäng) En vätska har densitet $\rho_0 = 2 \text{ kg/m}^3$ och hastighetsfält

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(-xz, \frac{xy}{2}, \frac{z^2}{2} \right) \text{ m/s.}$$

Beräkna hur stor massa som strömmar ut ur kroppen $K \subset \mathbb{R}^3$ per sekund, där

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 4, 4x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

10. (4 poäng) Betrakta ett plan med elektrisk potential

$$V(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y).$$

Vi vill placera ut två punkter $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ och $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ på avstånd $2\sqrt{2}$ från varandra så att spänningen mellan dem

$$V(x_1, y_1) - V(x_2, y_2)$$

blir så stor som möjligt. Var ska de placeras? Var noga med att visa att din lösning ger ett globalt och inte bara ett lokalt maximum.