Tentamen: Lösningsförslag

Fredag 9 juni 2017 08:00-13:00
SF1674 Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Bestäm samtliga horisontella tangentplan till ytan

$$z = 2x^2 - xy - y^2 + 4x - y + 5.$$

Lösning: Tangentplanet är horisontellt om och endast om $z'_x = z'_y = 0$, dvs om och endast om $4x - y + 4 = 0$ och $-x - 2y - 1 = 0$. Detta ekvationssystem har endast en lösning given av $(x, y) = (-1, 0)$. Motsvarande värde för z är $z = 3$, varför det sökta planet har ekvation $z = 3$.
Svar: Det enda horisontella tangentplanet är $z = 3$.

2. (4 poäng) Ytorna $y^2 + z^2 = 2$ och $x^3 + yz = 1$ skär varandra i en kurva. Hitta en parametrisering av denna kurva.

Lösning: Vi parametriserar först cirkeln $y^2 + z^2 = 2$ i yz-planet som följer:

$$\begin{cases} y(t) = \sqrt{2}\cos t, \\ z(t) = \sqrt{2}\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t < 2\pi.$$

Sätter vi in detta i ekvationen $x^3 + yz = 1$, finner vi att $x(t)$ måste uppfylla

$$x(t)^3 + y(t)z(t) = 1 \quad \text{dvs} \quad x(t) = (1 - 2\cos(t)\sin(t))^{1/3} = (1 - \sin 2t)^{1/3}.$$

Alltså finner vi följande parametriseringen för skärningen:

$$\mathbf{r}(t) = \big((1 - \sin 2t)^{1/3}, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t\big), \qquad 0 \leq t < 2\pi.$$

3. (4 poäng) Beräkna

$$\iint_D x^2 y^2 dxdy$$

där D är området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq y \leq 1, x \geq 0\}.$$

Lösning: Området D består av alla punkter (x, y) med $0 \leq x \leq 1$ sådana att y ligger ovanför grafen $y = x^2$och under linjen $y = 1$. Alltså är

$$\iint_D x^2 y^2 dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^2 y^2 dydx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^1 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^2 - x^8) dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{27}.$$

Svar: $\frac{2}{27}$

4. (4 poäng) Låt $T(x,y)$ vara temperaturen i punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ och antag att

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = x.$$

(a) Betrakta temperaturen på kurvan $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametriserad av

$$\gamma : \ (x(t), y(t)) = (2\sqrt{5}\cos t, \sqrt{5}\sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Bestäm genom att studera dT/dt och d^2T/dt^2 de punkter på γ där temperaturen har lokala max värden.

Lösning: Vi noterar först att γ är en ellips med halvaxlar $2\sqrt{5}$ och $\sqrt{5}$. Vi vill optimera funktionen $f(t) := T(x(t), y(t))$. Vi beräknar med hjälp av kedjeregeln

$$\begin{aligned} f'(t) = \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} \\ &= (\sqrt{5}\sin t)(-2\sqrt{5}\sin t) + (2\sqrt{5}\cos t)(\sqrt{5}\cos t) \\ &= 10(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ &= 10\cos(2t). \end{aligned}$$

Det följer att $f(t)$ har stationära punkter då $\cos(2t) = 0$, dvs de stationära punkterna ges av $t = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Eftersom $f''(t) = d^2T/dt^2 = -20\sin(2t)$, ser vi att $f''(t) < 0$ för $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, och $f''(t) > 0$ för $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Alltså har T lokala max värden i de punkter som svarar mot $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, dvs i punkterna

$$(x,y) = \pm\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) = \pm(\sqrt{10}, \sqrt{5/2}).$$

Svar: T har lokala max värden i punkterna $(\sqrt{10}, \sqrt{5/2})$ och $(-\sqrt{10}, -\sqrt{5/2})$.

(b) Antag att temperaturen T ges av $T(x,y) = xy - 2$. Vilket är det största värdet som funktionen T antar på kurvan γ?

Lösning: Eftersom T uppfyller $T'_x = y$ och $T'_y = x$, vet vi från (a) att max värdet antas i antingen $(\sqrt{10}, \sqrt{5/2})$ eller $(-\sqrt{10}, -\sqrt{5/2})$. Eftersom

$$T(\sqrt{10}, \sqrt{5/2}) = T(-\sqrt{10}, -\sqrt{5/2}) = \sqrt{10}\sqrt{5/2} - 2 = 3,$$

ser vi att högsta temperaturen på ellipsen γ är 3.
Svar: Största värdet av T på γ är 3.

5. (4 poäng) Låt D vara en triangel i planet med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,1)$. För vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergerar integralen

$$I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^\alpha}\,dxdy?$$

Bestäm värdet av I i de fall integralen konvergerar.

Lösning: Vi har

$$I = \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} \frac{1}{(x+y)^\alpha} dy dx.$$

Antag först att $\alpha = 1$. Då får vi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \ln(x+y)\Big|_{y=0}^{1-\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \left(\ln\left(\frac{x}{2}+1\right) - \ln x\right) dx \\ &= 2\int_1^2 \ln u \, du - \int_0^2 \ln x \, dx = 2[u(\ln u - 1)]_1^2 - [x(\ln x - 1)]_0^2 = \ln 4, \end{aligned}$$

så integralen är konvergent. Antag nu att $\alpha \neq 1$. Då får vi

$$I = \int_0^2 \frac{(x+y)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_{y=0}^{1-\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \left(\frac{(\frac{x}{2}+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) dx.$$

Integralen $\int_0^2 (\frac{x}{2}+1)^{1-\alpha} dx$ konvergerar för alla $\alpha \in \mathbb{R}$. Integralen $\int_0^2 x^{1-\alpha} dx$ konvergerar för $\alpha < 2$ och divergerar för $\alpha \geq 2$. Det följer att I är konvergent för $\alpha < 2$ och divergent för $\alpha \geq 2$. För $\alpha < 2$ finner vi

$$I = \frac{1}{1-\alpha}\left[2\frac{(\frac{x}{2}+1)^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^2 = \frac{2^{2-\alpha}-2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}.$$

Svar: Integralen I är divergent för $\alpha \geq 2$, konvergent för $\alpha < 2$ och

$$I = \begin{cases} \ln 4, & \alpha = 1, \\ \frac{2^{2-\alpha}-2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, & \alpha \in (-\infty, 1) \cup (1, 2). \end{cases}$$

6. (4 poäng) Visa att ekvationen $x^3 + 2y^3 + z^3 + 5x^2 z = 9$ entydigt definierar en C^1-funktion $z = z(x, y)$ sådan att $z(1, 1) = 1$ i en omgivning av $(x, y) = (1, 1)$. Bestäm riktningsderivatan $z'_{\mathbf{v}}(1, 1)$ där $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Lösning: Låt $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 + 5x^2 z - 9$. Vi har $F(1, 1, 1) = 0$ och $F'_z = 3z^2 + 5x^2$. Eftersom $F'_z(1, 1, 1) = 8 \neq 0$ så definierar ekvationen $F = 0$ enligt implicita funktionssatsen $z = z(x, y)$ entydigt som en C^1-funktion i en omgivning av $(1, 1)$. Dessutom gäller

$$z'_x(x, y) = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 + 10xz}{3z^2 + 5x^2}, \qquad z'_y(x, y) = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6y^2}{3z^2 + 5x^2}.$$

Evaluerat i punkten $(1, 1, 1)$ ger detta

$$z'_x(1, 1) = -\frac{13}{8}, \qquad z'_y(1, 1) = -\frac{6}{8}.$$

Således ges riktningsderivatan $z'_{\mathbf{v}}(1, 1)$ av

$$z'_{\mathbf{v}}(1, 1) = \left(-\frac{13}{8}, -\frac{6}{8}\right) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = -\frac{19}{8\sqrt{2}}.$$

Svar: $-\frac{19}{8\sqrt{2}}$

7. (4 poäng) Låt γ vara kurvan där cylindern $x^2+z^2=4$ skär hemisfären $x^2+y^2+z^2=16$, $y \geq 0$. Antag att γ är moturs orienterad sedd från origo. Bestäm värdet av kurvintegralen av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^4y^2, xyz, xyz^2)$ längs γ.

Lösning: Med hjälp av Stokes sats kan den sökta kurvintegralen skrivas

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{N}dS,$$

där D är ytan

$$D = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+z^2 \leq 4, y=\sqrt{12}\}$$

och $\mathbf{N}=(0,-1,0)$. Eftersom

$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot(0,-1,0) = \frac{\partial}{\partial x}(xyz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^4y^2) = yz^2,$$

ger detta

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_D yz^2 dS = \sqrt{12}\iint_{\{x^2+z^2\leq 4\}} z^2 dxdz \\
&= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ dxdz = rdrd\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{12}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r\sin\varphi)^2 rdrd\varphi \\
&= \sqrt{12}\Big(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\Big)\Big(\int_0^2 r^3dr\Big) \\
&= \sqrt{12}\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi\sqrt{12} = 8\pi\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Svar: $8\pi\sqrt{3}$

8. (4 poäng) Låt Y vara ytan

$$z = x^2+y^2, \qquad x^2+y^2\leq 1,$$

där x, y och z mäts i meter.

(a) Skissera ytan. Skriv ytan på parameterform och beräkna en normalvektor till ytan med hjälp av parameterframställningen. Kan man beräkna en normalvektor på något annat sätt?

Lösning: Detta är uppgift 8.14 i övningsboken. Lösning finns också i övningsboken. Med x och y som parametrar beskrivs Y som

$$Y:\ \mathbf{r}(x,y) = (x,y,x^2+y^2), \qquad x^2+y^2\leq 1.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_x &= (1,0,2x),\\
\mathbf{r}'_y &= (0,1,2y),
\end{aligned}$$

finner vi att $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y = (-2x,-2y,1)$ är en normalvektor. Man kan också finna en normalvektor genom att skriva ytan som en nivåyta, tex $f(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$.

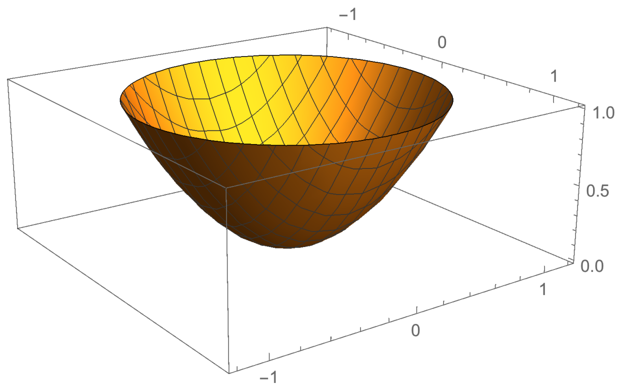

Figure 1 *Skiss av ytan Y.*

Det följer att $\nabla f = (2x, 2y, -1)$ är en normalvektor till ytan.
Svar: Se Figur 1 för en skiss av Y. Ytan Y har parameterframställningen $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ för $x^2 + y^2 \leq 1$. $(-2x, -2y, 1)$ är en normalvektor. En normalvektor kan även beräknas genom att ta gradienten av $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

(b) Beräkna arean av Y.

Lösning: Arean av paraboloiden Y är $\iint_Y dS$, där areaelementet dS är

$$dS = |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dxdy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy.$$

Om D betecknar patametermängden $x^2 + y^2 \leq 1$, så följer att arean ges av

$$\begin{aligned} \iint_Y dS &= \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r dr d\varphi \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$

(c) Beräkna massan m av ytan om den har massbeläggningen $\sigma = x^2$ (kg/m^2).

Lösning: Ytans massa m ges av

$$\begin{aligned} m &= \iint_Y \sigma dS = \iint_D x^2 \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2(\varphi) \sqrt{4r^2 + 1}\, r dr d\varphi \\ &= \pi \int_0^1 r^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r dr \\ &= \begin{bmatrix} 4r^2 + 1 = s \\ 8rdr = ds \end{bmatrix} = \pi \int_1^5 \frac{s - 1}{4} \sqrt{s} \frac{ds}{8} \\ &= \frac{\pi}{32} \int_1^5 (s^{3/2} - s^{1/2}) ds = \frac{\pi}{32} \left[\frac{2}{5} s^{5/2} - \frac{2}{3} s^{3/2} \right]_1^5 \\ &= \frac{\pi(1 + 25\sqrt{5})}{120}. \end{aligned}$$

Svar: $m = \frac{\pi(1+25\sqrt{5})}{120}$

9. (4 poäng) Beräkna

$$\int_\gamma (x-y)dx + (x+y)dy,$$

där γ är övre halvan av ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$.

Lösning: Detta är uppgift 9.13 i övningsboken. Låt γ_2 vara kurvan från $(-1,0)$ till $(1,0)$ längs x-axeln. Då gäller $\gamma + \gamma_2 = \partial D$ där D betecknar övre halvan av ellipsskivan $x^2 + 2y^2 \leq 1$ med halvaxlar 1 och $1/\sqrt{2}$. Eftersom

$$\int_{\gamma_2} (x-y)dx + (x+y)dy = \int_{-1}^{1} x dx = 0,$$

så ger Greens formel

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (x-y)dx + (x+y)dy &= \left(\int_\gamma + \int_{\gamma_2}\right)(x-y)dx + (x+y)dy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right)dxdy = 2\iint_D dxdy,
\end{aligned}$$

dvs den sökta integralen är lika med arean av ellipsskivan $x^2 + 2y^2 \leq 1$. Eftersom en ellipsskiva med halvaxlar a och b har area πab, finner vi att integralens värde är $\pi/\sqrt{2}$.

Alternativ lösning: Kurvan γ har parametriseringen

$$\gamma:\ (x(t), y(t)) = \left(\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right), \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (x-y)dx + (x+y)dy &= \int_0^\pi \left\{\left(\cos t - \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\cos t + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\frac{dy}{dt}\right\}dt \\
&= \int_0^\pi \left\{\left(\cos t - \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)(-\sin t) + \left(\cos t + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right\}dt \\
&= \int_0^\pi \left(-\cos t \sin t + \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} + \frac{\cos^2 t}{\sqrt{2}} + \frac{\cos t \sin t}{2}\right)dt \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Svar: $\pi/\sqrt{2}$

10. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut ur kroppen $K \subset \mathbb{R}^3$, där

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(5x^3 + 12xy^2 + e^x \sin z, y^3, 5z^3 + e^x \cos z\right)$$

och

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq 4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 2, x+y \geq 0, \sqrt{3}x - y \leq 0, z \geq 0\}.$$

Lösning: Med hjälp av divergenssatsen ser vi att det sökta flödet Φ ges av

$$\Phi = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{F}) dxdydz = \iiint_K 15(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz.$$

Variabelbytet

$$\tilde{x} = 2x, \qquad \tilde{y} = 2y, \qquad \tilde{z} = z, \qquad \frac{d(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{d(x, y, z)} = 4,$$

ger

$$\Phi = \iiint_{\tilde{K}} 15\left(\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{4} + \tilde{z}^2\right)\frac{1}{4} d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}$$

där

$$\tilde{K} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 2, \tilde{x} + \tilde{y} \geq 0, \sqrt{3}\tilde{x} - \tilde{y} \leq 0, \tilde{z} \geq 0\}.$$

I sfäriska koordinater

$$\tilde{x} = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad \tilde{y} = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad \tilde{z} = r\cos\theta,$$

bestäms kroppen $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^3$ av

$$\tilde{K} : 1 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 4\tilde{z}^2) d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} &= (r^2 \sin^2\theta + 4r^2\cos^2\theta) r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= (r^4 \sin^3\theta + 4r^4 \cos^2\theta \sin\theta) drd\theta d\varphi,\end{aligned}$$

finner vi

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{15}{16} \iiint_{\tilde{K}} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 4\tilde{z}^2) d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} \\ &= \frac{15}{16} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (r^4 \sin^3\theta + 4r^4 \cos^2\theta \sin\theta) drd\theta d\varphi \\ &= \frac{15}{16} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta + 4\cos^2\theta \sin\theta) d\theta \right) \left(\int_1^{\sqrt{2}} r^4 dr \right) \\ &= \frac{15}{16} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 - \cos^2\theta)\sin\theta + 4\cos^2\theta \sin\theta) d\theta \right) \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{15}{16} \frac{5\pi}{12} \left[-\cos\theta - \cos^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{5/2} - 1}{5} \\ &= \frac{5\pi(2^{5/2} - 1)}{32}.\end{aligned}$$

Svar: $\frac{5\pi(2^{5/2}-1)}{32}$