

Tentamen

Fredag 9 juni 2017 08:00-13:00

SF1674 Flervariabelanalys

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Bestäm samtliga horisontella tangentplan till ytan

$$z = 2x^2 - xy - y^2 + 4x - y + 5.$$

2. (4 poäng) Ytorna $y^2 + z^2 = 2$ och $x^3 + yz = 1$ skär varandra i en kurva. Hitta en parametrisering av denna kurva.

3. (4 poäng) Beräkna

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy$$

där D är området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1, x \geq 0\}.$$

4. (4 poäng) Låt $T(x, y)$ vara temperaturen i punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ och antag att

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = x.$$

- (a) Betrakta temperaturen på kurvan $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametriserad av

$$\gamma : (x(t), y(t)) = (2\sqrt{5} \cos t, \sqrt{5} \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Bestäm genom att studera dT/dt och d^2T/dt^2 de punkter på γ där temperaturen har lokala max värden.

- (b) Antag att temperaturen T ges av $T(x, y) = xy - 2$. Vilket är det största värdet som funktionen T antar på kurvan γ ?

5. (4 poäng) Låt D vara en triangel i planet med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(0, 1)$. För vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergerar integralen

$$I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^\alpha} dx dy?$$

Bestäm värdet av I i de fall integralen konvergerar.

6. (4 poäng) Visa att ekvationen $x^3 + 2y^3 + z^3 + 5x^2z = 9$ entydigt definierar en C^1 -funktion $z = z(x, y)$ sådan att $z(1, 1) = 1$ i en omgivning av $(x, y) = (1, 1)$. Bestäm riktningsderivatan $z'_{\mathbf{v}}(1, 1)$ där $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.
7. (4 poäng) Låt γ vara kurvan där cylindern $x^2 + y^2 = 4$ skär hemisfären $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $y \geq 0$. Antag att γ är moturs orienterad sedd från origo. Bestäm värdet av kurvintegralen av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^4 y^2, xyz, xyz^2)$ längs γ .

8. (4 poäng) Låt Y vara ytan

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

där x, y och z mäts i meter.

(a) Skissera ytan. Skriv ytan på parameterform och beräkna en normalvektor till ytan med hjälp av parameterframställningen. Kan man beräkna en normalvektor på något annat sätt?

(b) Beräkna arean av Y .

(c) Beräkna massan m av ytan om den har massbeläggningen $\sigma = x^2$ (kg/m²).

9. (4 poäng) Beräkna

$$\int_{\gamma} (x - y)dx + (x + y)dy,$$

där γ är övre halvan av ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$ från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$.

10. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut ur kroppen $K \subset \mathbb{R}^3$, där

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^3 + 12xy^2 + e^x \sin z, y^3, 5z^3 + e^x \cos z)$$

och

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq 4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 2, x + y \geq 0, \sqrt{3}x - y \leq 0, z \geq 0\}.$$