

Tentamen

Torsdag 15 mars 2018 08:00-13:00

SF1674 Flervariabelanalys

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{1}{2xy} - \frac{1}{xy(x+2)} \right).$$

2. (4 poäng) Bestäm alla andra ordningens partiella derivator till

$$f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2) + xyz.$$

3. (4 poäng) Bestäm alla skärningspunkter mellan kurvorna $x^2 - y^2 = 4$ och $xy = \sqrt{5}$. Bestäm också vinkeln mellan kurvorna i varje skärningspunkt.

4. (4 poäng) Bestäm värdet av $\int_0^2 \int_{x^3}^8 x^2 e^{-y^2} dy dx$.

5. (4 poäng) Är avbildningen

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \end{cases}$$

bijektiv i en omgivning av $(1, 1)$? Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$ och $\frac{\partial x}{\partial u}(0, 2)$.

6. (4 poäng) Bestäm kurvintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y^3, e^{xy-x+z}, x + z^2)$$

längs cirkeln $x^2 + z^2 = 1$ i planet $y = 1$, där cirkeln är orienterad medurs sedd från origo.

7. (4 poäng) Avgör om följande påståendena är sanna eller falska. Motivering krävs inte. Det räcker att svara "sant" eller "falskt" på varje påstående.

(a) Om $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, är två punkter i rummet så är

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \quad t \in [0, 1],$$

en parametrisering av det raka linjesegmentet från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$.

(b) Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett C^2 -vektor fält definierat i en öppen delmängd D av $\mathbb{R}^2$ sådant att

$$Q'_x(x, y) = P'_y(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält i D .

(c) Dubbelintegralen

$$\iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{1+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$$

är konvergent.

(d) Antag att funktionerna $f(s, x)$ och $f'_s(s, x)$ är kontinuerliga för $(s, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$. Då är den s -beroende integralen $F(s) = \int_0^1 f(s, x) dx$ deriverbar på $\mathbb{R}$ och

$$F'(s) = \int_0^1 f'_s(s, x) dx.$$

8. (4 poäng) Låt D vara en liksidig triangel med ena hörnet i origo sådan att

$$\oint_{\partial D} (xy^2 + x^3 e^x) dx + (x^2 y + 6x) dy = 9.$$

Vilken area har D ?

9. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 y, yz, xz)$ ut genom sfären med centrum i $(1, 0, 1)$ och radie 1.

10. (4 poäng) Låt $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ vara tre punkter i planet och betrakta funktionen

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| + |\mathbf{x} - \mathbf{b}| + |\mathbf{x} - \mathbf{c}|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Visa att f är kontinuerlig i hela planet och C^1 i området $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(b) Visa att om $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ är en stationär punkt till f , så är vinkeln mellan vilka två som helst av de tre vektorerna $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, $\mathbf{x} - \mathbf{b}$, $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ lika med $2\pi/3$.