Lösningar till tentamen SF2710, den 15 mars 2008

(1) Påståendet är sant. Bevis:

Anta att motsatsen gäller, dvs. att $\sqrt{2n} \in \mathbb{Q}$ för något udda tal n.
I så fall är $2n = \frac{p^2}{q^2}$, där p och q två heltal utan gemensamma delare.
$\Rightarrow 2nq^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ är ett jämnt tal $\Rightarrow$ [Kvadraten på udda tal är udda] $\Rightarrow p$ ett jämnt tal, dvs. $p = 2m$ för något heltal m
$\Rightarrow 2nq^2 = 4m^2 \Rightarrow nq^2 = 2m^2 \Rightarrow nq^2$ jämnt $\Rightarrow$ [n udda enl. förutsättningen] $\Rightarrow q^2$ jämnt $\Rightarrow q$ jämnt.
Men då har både p och q talet 2 som gemensam delare.
Motsägelsen visar att antagandet, att satsen är fel, inte stämmer. Satsen är därför sann.

V.S.B

(2.) Felet finns i det sista ledet i kombination med det valda startvärdet.

"$10(n(\pi-1)-1) > 0$"

Den olikheten gäller inte för $n = 0$ (men väl för $n \geq 1$).
(Anmärkning: Olikheten $\pi^n > 10n$ gäller inte heller för $n = 1$ och 2, men är riktig för $n = 3$; $\pi^3 > 31 > 30$, och därmed enligt det förda induktionsresonemanget för alla $n \geq 3$.)

---

(3) För godtyckligt $x \in \mathbb{R}$ och godtyckliga $\varepsilon > 0$, skall vi visa att det finns ett tal $\delta(x,\varepsilon) > 0$, sådant att

$$\left| \sqrt{|x+h|} - \sqrt{|x|} \right| < \varepsilon \text{ för alla } |h| < \delta.$$

Vi särskiljer två fall: $x \neq 0$ och $x = 0$

Fallet $x \neq 0$:

$$\left|\sqrt{|x+h|} - \sqrt{|x|}\right| = \left[\begin{array}{c}\text{Förläng med}\\ \sqrt{|x+h|} + \sqrt{|x|}\end{array}\right] = \frac{\left||x+h| - |x|\right|}{\sqrt{|x+h|} + \sqrt{|x|}} \leq \left[\begin{array}{l}\text{Triangelolikheten på formen } ||a|-|b|| \leq |a-b| \\ \text{och } \sqrt{|x+h|} \geq 0\end{array}\right]$$

$$\leq \frac{|x+h-x|}{\sqrt{|x|}} = \frac{|h|}{\sqrt{|x|}} < \varepsilon \quad \text{om } |h| < \varepsilon\sqrt{|x|} = \delta(x,\varepsilon),\ x \neq 0.$$

Fallet $x = 0$: $\quad \left|\sqrt{|h|} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{|h|} < \varepsilon \quad$ om $|h| < \varepsilon^2 = \delta(0,\varepsilon)$

V.S.B

(4.) Vi har allmänt för kontinuerliga funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

- Om $\mathbb{R} \supset A$ och A öppen, så är $f^{-1}(A)$ öppen
- Om $\mathbb{R} \supset A$ och A sluten, så är $f^{-1}(A)$ sluten
- om $\mathbb{R}^n \supset B$ är kompakt, så är $f(B)$ kompakt

(Kompakt = sluten och begränsad)

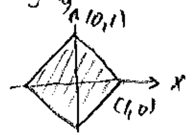
I vårt fall är funktionen f kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$ (eftersom den är ett polynom) och A_1 är ett slutet intervall, alltså är $f^{-1}(A_1)$ sluten. Men $f^{-1}(A_1)$ är också begränsad, ty t.ex.

$$0 \le x^2 + xy + y^2 = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1}{2}(x+y)^2 \le 1 \implies 0 \le \frac{x^2+y^2}{2} \le 1,$$

dvs. mängden $f^{-1}(A_1) \subset \{(x,y);\ x^2+y^2 \le 2\}$ = Cirkel (med radie $\sqrt{2}$).

$f^{-1}(A_1)$ är alltså kompakt.

Vidare: Intervallet A_2 är öppet $\Rightarrow$ $f^{-1}(A_2)$ är öppen

Mängden B  är sluten (randen $|x|+|y|=1$ ingår i B) och begränsad (B är del av enhetscirkeln), så B är kompakt, varför $f(B)$ också är kompakt.

Svar: $f^{-1}(A_1)$ och $f(B)$ är kompakta, $f^{-1}(A_2)$ är öppen

---

(5) Vi har att $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n(nx+1)^2} = \dfrac{1}{n^3} \dfrac{1}{\frac{1}{n^3} + (x+\frac{1}{n})^2} \to 0 \cdot \dfrac{1}{0+x^2} = 0$ om $x \neq 0$ och $n \to \infty$

och att $f_n(0) = \dfrac{1}{1+n} \to 0$ då $n \to \infty$.

Alltså är $\underline{f(x) \equiv 0}$.

Konvergensen är likformig i mängden A ($= \mathbb{R}$ i a-uppg. och $= \mathbb{R}_+$ i b.)

$$M(n) = \max_{x\in A} |f_n(x) - f(0)| = \max_{x \in A} \frac{1}{1+n(nx+1)^2} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

och annars inte.

(a.) $0 \le \dfrac{1}{1+n(nx+1)^2}$ är maximal då nämnaren är minimal.

Uppenbarligen gäller $1 + \underbrace{n(nx+1)^2}_{\ge 0} \ge 1$ med likhet då $x = -\frac{1}{n}$

Alltså $M(n) = 1 \not\to 0$ då $n \to \infty$. Ej likformig konvergens alltså.

(5b) För $x \geq 0$ är $1+n(nx+1)^2$ en växande funktion och därmed är $f_n(x) = \frac{1}{1+n(nx+1)^2}$ avtagande, dvs. $M_n = \max_{x \geq 0} f_n(x) = f_n(0) = \frac{1}{1+n} \to 0$ då $n \to \infty$

Konvergensen är alltså likformig.

<u>Svar:</u> Icke likformig konvergens i a., likformig konvergens i b.

(6.) a. För $y=0$, $x \neq 0$ är $f(x,y) = \frac{x^n}{x^2} = x^{n-2} \underset{x\to 0}{\not\to} 0 = f(0,0)$ då $n \leq 2$ och $x \to 0$.

Funktionen är alltså inte kontinuerlig i $(0,0)$ om $n \leq 2$

För $n > 2$ har vi med $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geq 0$:

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| = \frac{|r^n \cos^n\varphi|}{|r^2 + r^2\cos\varphi\sin\varphi|} = r^{n-2}\frac{|\cos^n\varphi|}{1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi} \leq r^{n-2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$$

$= 2r^{n-2} \to 0$ då $r \to 0+$, oberoende av φ.

Alltså är

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, dvs. funktionen är kontinuerlig om $n > 2$.

---

b. Vi undersöker först förekomsten av partialderivator i $(0,0)$. Dessas existens är ett nödvändigt (men inte tillräckligt) villkor för differentierbarhet.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x^n}{x^2} - 0\right) = \lim_{x\to 0} x^{n-3} =$$

$$= \begin{cases} 0 & n > 3, \\ 1 & n = 3, \\ \pm\infty & n < 3, \end{cases} \quad \text{då } x \to 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0.$$

Funktionen är alltså inte differentierbar i $(0,0)$ om $n < 3$.

<u>För $n = 3$</u>: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Vi har då för att

$$|R(x,y)| = \frac{1}{|(x,y)|}\cdot\Big|f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=1}\cdot x - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0}\cdot y\Big| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left|\frac{x^3}{x^2+xy+y^2} - x\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{|-x^2y - xy^2|}{x^2+xy+y^2}$$

(6b) forts. Speciellt för $x=y$:

$$|R(x,x)| = \frac{1}{\sqrt{2}|x|}\cdot\frac{|x|^3}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0 \text{ då } x\to 0$$

Villkoret $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |R(x,y)| = 0$ är alltså inte uppfyllt, dvs funktionen är inte differentierbar i $(0,0)$ för $n=3$

För $n>3$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, varav

$$|R(x,y)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{|x^n|}{x^2+xy+y^2} = \left|\left\{\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r\ge 0\end{matrix}\right.\right| =$$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{r^n}{r^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)} \le \frac{r^{n-3}}{1-1/2} = 2r^{n-3} \to 0 \text{ då } r\to 0,$$

oberoende av φ. Alltså är

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |R(x,y)| = 0, \text{ dvs. funktionen är differentierbar om } n>3$$

Svar: a. Kontinuerlig om $n>2$, annars inte.
b. Differentierbar om $n>3$, annars inte.

(7.) $u>1, v>1 \Rightarrow \ln u$ och $\ln v > 0 \Rightarrow u\circ v = u^{\ln v} = e^{\ln u\cdot\ln v} > e^0 = 1$
dvs. $u\circ v\in S$ om u och $v\in S$.

I. Associativitet?

$(u\circ v)\circ w = u^{\ln v}\circ w = \left(u^{\ln v}\right)^{\ln w} = u^{\ln v\cdot\ln w}$

$u\circ(v\circ w) = u\circ v^{\ln w} = u^{\ln(v^{\ln w})} = u^{\ln w\cdot\ln v} = u^{\ln v\cdot\ln w}$

Alltså $(u\circ v)\circ w = u\circ(v\circ w)$, dvs. associativitet gäller.

II Existens av enhet?

$u\circ x = u \iff u^{\ln x} = u \iff x = e.$
$y\circ v = v \iff y^{\ln v} = v \iff \ln v\cdot\ln y = \ln v \Rightarrow \ln y = 1 \iff y = e$
Talet e duger alltså som enhet i $(S,\circ)$.

III Existens av invers?

$u\circ x = e \iff u^{\ln x} = e \iff \ln x\cdot\underbrace{\ln u}_{>0} = \ln e = 1 \iff x = e^{\frac{1}{\ln u}}$
$y\circ u = e \iff y^{\ln u} = e \iff \ln u\,\ln y = 1 \iff y = e^{1/\ln u}$
Invers existerar alltså i $(S,\circ)$. Inversen till u är $e^{1/\ln u}$.

$(S,\circ)$ är alltså en grupp.

(7 forts.) Eftersom $u \circ v = u^{\ln v} = (e^{\ln u})^{\ln v} = e^{\ln u \cdot \ln v}$
och $\ln u \cdot \ln v = \ln v \cdot \ln u$ så är $u \circ v = v \circ u$ för alla
$u, v \in S$. Gruppen är abelsk. [Anm: $(S, \circ)$ är isomorf med $(\mathbb{R}, +)$
Isomorfi $S \to \mathbb{R}$ ges av t.ex. $\varphi(u) = \ln(\ln u)$]

(8.) Talet 0 uppfyller kraven i P1 och P4, P1 trivialt och
P4 eftersom alla efterföljare i $M_1 \geq \frac{1}{2}$ och alla i $M_2 \geq 3$,
ingen efterföljare är alltså $= 0$.

P2 är sant direkt enl. textens definition av $^+$-operationen.

P3: Om $m_1^+ = m_2^+$ och detta tal < 1, så ligger m_1^+ och m_2^+ i M_1

dvs. $\frac{m_1+1}{m_1+2} = \frac{m_2+1}{m_2+2} \Rightarrow m_1 = m_2$

Om $m_1^+ = m_2^+$ och detta tal ≥ 1, så ligger m_1^+ och m_2^+ i M_2,

dvs $m_1 + 1 = m_2 + 1 \Rightarrow m_1 = m_2$

Villkoret P3 är alltså uppfyllt.

Beträffande P5: Anta att P5 skulle vara uppfyllt och
låt $U(m)$ vara utsagan "$f(m) = 1$ för alla $m \in M$", där f
är funktionen beskriven i ledningen:

I Påståendet $U(0)$: $f(0) = 1$ är sann eftersom $0 \in M_1$

II Anta att $U(m)$ är sant för något $m \in M$, dvs.

$f(m) = 1 \Rightarrow$ [f:s definition] $\Rightarrow m \in M_1 \Rightarrow m = \frac{p}{p+1}$, $p \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow m^+ = \frac{p+1}{p+2} \in M_1 \Rightarrow$ [f:s def] $\Rightarrow f(m^+) = 1$

Enligt I och II skulle därmed $U(m)$ vara sann för alla
$m \in \underline{M}$, dvs $f(m) = 1$ även då $m \in M_2$, vilket är
uppenbart osant.

Antagandet att P5 är uppfyllt är alltså felaktigt.

Anmärkning: Exempel av det här slaget visar att man omöjligen
kan bevisa P5 utifrån axiomen P1–P4. Dvs. P5 är ett av P1–P4
oberoende axiom.