Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen för SF2710, Matematik, fördjupning för CL, 07/08
den 15 mars 2008, kl 8.00 – 13.00

Inga hjälpmedel förutom räknedosa och bifogat PM.

Fordringar inklusive bonuspoäng från kursen:
Betyget A: ≥ 21p; B: 18 – 20; C: 16 – 17p; D: 14 – 15p; E: 12 – 13; Fx: 10 – 11 och F: < 10p.
Resultaten Fx och F är underkända, men Fx berättigar till komplettering.

1. Är följande påstående sant?

   ”Om n är ett udda heltal, så är $\sqrt{2n}$ irrationellt”.

   Ge bevis eller motexempel. (3p)

2. Leta upp felet (eller felen) i följande ”bevis” för att $\pi^n > 10n$, för alla positiva heltal n.

   Olikheten stämmer då $n = 0$, ty $\pi^0 = 1 > 0 = 10 \cdot 0$.

   Anta att olikheten är bevisad för ett visst n, dvs. att $\pi^n > 10n$. Vi visar att olikheten då också gäller för nästföljande heltal $n + 1$:

   $\pi^{(n+1)} - 10 \cdot (n+1) = \pi \cdot \pi^n - 10\,(n+1) >$ [Induktionsantagandet] $>$
   $> \pi \cdot 10n - 10(n+1) = 10(\,n(\pi - 1) - 1) > 0$, eftersom $\pi - 1 > 2$. (3p)

3. Bevisa *utgående från εδ-definitionen* av begreppet ”kontinuitet” att funktionen

   $$f(x) = \sqrt{|x|}$$

   är kontinuerlig för alla reella x. (3p)

4. Låt $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ och låt

   $\mathbf{A}_1 = \{z \quad \mathbf{R};\ 0 \le z \le 1\}$,

   $\mathbf{A}_2 = \{z \quad \mathbf{R};\ z > 1\}$,

   $\mathbf{B} = \{(x, y) \quad \mathbf{R}^2;\ |x| + |y| \le 1\}$.

   Vad kan sägas om öppenhet, slutenhet, kompakthet hos mängderna $f^{-1}(\mathbf{A}_1)$, $f^{-1}(\mathbf{A}_2)$, och $f(\mathbf{B})$.
   Motivera dina svar. (3p)

5. Låt $$f_n(x) = \frac{1}{1 + n\,(nx+1)^2},\ n \quad \mathbf{N}, \text{ och } f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

   a. Beräkna $f(x)$. Är konvergensen likformig på hela $\mathbf{R}$? (2p)
   b. Är konvergensen likformig på $\mathbf{R}_+ = \{x \quad \mathbf{R};\ x \ge 0\}$? (1p)
   Motivera svaren.

Var god vänd!

6. För vilka värden på heltalet n är funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{x^2 + xy + y^2}, & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{då } x = y = 0, \end{cases}$$

a. kontinuerlig i origo?

b. differentierbar i origo?

Motivera svaren. (4p)

7. Låt $\mathbf{S} = \{u \in \mathbf{R}, u > 1\}$ och definiera för u och $v \in \mathbf{S}$, räkneoperationen $\circ$:

$$u \circ v = u^{\ln v}.$$

Verifiera att $u \circ v \in \mathbf{S}$ om u och $v \in \mathbf{S}$, och att $(\mathbf{S}, \circ)$ utgör en grupp. Är gruppen abelsk? (3p)

8. Låt $\mathbf{M}$ bestå av ta1en 0, 1/2, 2/3, …, $p/(p + 1)$, … och dessutom av heltalen 2, 3, 4, …,

dvs.
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cup \mathrm{M}_2,$$

där
$$\mathbf{M}_1 = \left\{ \frac{p}{p+1}, p \in \mathbf{N} \right\} \text{ och } \mathbf{M}_2 = \{q \in \mathbf{N};\ q \geq 2\}.$$

Låt vidare för $x \in \mathbf{M}$, x^+ betyda det tal i $\mathbf{M}$ som är det minsta $> x$, dvs.

om $x = \dfrac{p}{p+1}$, så är $x^+ = \dfrac{p+1}{p+2}$ och om $x = q \geq 2$, så är $x^+ = q + 1$.

Verifiera att alla Peanos axiom utom induktionsaxiomet är uppfyllda för $(\mathbf{M}, {}^+)$. (3p)

Ledning: Betrakta t.ex. funktionen $f: \mathbf{M} \rightarrow \{0, 1\}$:

$$f(m) = \begin{cases} 1, & \text{om } m \in \mathbf{M}_1, \\ 0, & \text{om } m \in \mathbf{M}_2: \end{cases}$$

Kontrollera att *om* induktionsaxiomet skulle gälla, så skulle man kunna bevisa påståendet

” $f(m) = 1$ för alla $m \in \mathbf{M}$”.

Lycka till!

PM för tentamen 080315, SF2710

Peanos axiomsystem för de naturliga talen

P1. Det finns ett naturligt tal 0.

P2. Varje naturligt tal n har en s.k. efterföljare n^+.

P3. Om $n^+ = m^+$ så är $n = m$.

P4. Inget naturligt tal har 0 som efterföljare.

P5. Om man vet om en utsaga om naturliga tal att

I. den är sann för talet 0 och

II. den är sann för n^+ om den är sann för n,

så är utsagan sann för alla naturliga tal.

(Induktionsaxiomet)

Grupper

En mängd **M**, försedd med ett räknesätt, här skrivet , (dvs. en funktion $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$), sådant att

I. $(a \quad b) \quad c = a \quad (b \quad c)$ för alla a, b och c **M**, (Associativitet)

II. det finns ett speciellt element i **M**, vi betecknar det här 1, sådant att
$1 \quad a = a \quad 1 = a$ för alla a **M**, (Existens av enhet)

III. till varje a **M** finns ett *inverst* element, vi skriver a^{-1}, sådant att
$a^{-1} \quad a = a \quad a^{-1} = 1$. (Existens av invers)

kallas en *grupp*.

Om dessutom

IV. $a \quad b = b \quad a$ för alla a och b **M**, (Kommutativitet)

så säger man att gruppen är *kommutativ* eller *abelsk.*

Definition av kontinuitet:

Funktionen $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\boldsymbol{a}$ om

det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta(\varepsilon, \boldsymbol{a}) > 0$, sådant att

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta \qquad |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| < \varepsilon.$$

Definition av differentierbarhet

Funktionen $\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är differentierbar i punkten $\boldsymbol{a}$ om

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \cdot \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}),$$

där $\boldsymbol{A}$ är en av $\boldsymbol{x}$ oberoende linjär avbildning $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (dvs. en $m \times n$- matris) och där

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \mathbf{0}.$$

Kriterium för likformig konvergens av funktionsföljder.

Om $f_n(x)$ är en följd av funktioner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $f_n \to f$ då $n \to \infty$, så är konvergensen likformig på delmängden $\mathbf{G}$ $\mathbf{R}$ om och endast om

$$M_n = \sup_{x \quad \mathbf{G}} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$