Lösningsförslag till kompletteringsskrivningen till repetitionskursen i Amelia I, 2006–06–26.

1. Man får: $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1}) = \{ \text{ utveckling efter 1:a raden } \} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -47$$

Svar: -47.

2. De båda linjernas riktningsvektorer är $\boldsymbol{v}_1 = (1,-4,1)$ respektive $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,-2)$. Man får:

vektorn $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = (6,3,6)$ är planets normalvektorn

punkten $\boldsymbol{p}(0) = (1,1,0)$ ligger i planet.

Planet ges av ekvationen

$$\boldsymbol{n} \cdot (x-1, y-1, z-0) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-1) + 6 \cdot (z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z = 3.$$

Avståndet från punkten $(2,3,1)$ till planet är $= \dfrac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 2$

Svar: 2.

3. Implicit derivering av $8\sqrt{2x + y^3} + \sqrt[3]{x - 3y} = 25$ med avseende på x ger

$$8 \cdot \frac{2 + 3y^2y'}{2\sqrt{2x + y^3}} + \frac{1 - 3y'}{3(x - 3y)^{2/3}} = 0$$

För $x = 4, y = 1$ får man $\dfrac{8 + 12y'}{3} + \dfrac{1 - 3y'}{3} = 0$ dvs $y'(4) = -1$.

Tangenten i punkten $(4,1)$ ges av $\dfrac{y-1}{x-4} = y'(4) \;\Leftrightarrow\; x + y = 5$.

Normalen i punkten $(4,1)$ ges av $\dfrac{y-1}{x-4} = -\dfrac{1}{y'(4)} \;\Leftrightarrow\; x - y = 3$.

Svar: Tangenten ges av $x + y = 5$. Normalen ges av $x - y = 3$.

4. Karakteristisk ekvation är här

$$r^2 + 4r + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r+2)^2 = -1 \;\Leftrightarrow\; r = -2 \pm \mathrm{i}.$$

Följaktligen är $y_h = (A \cos x + B \sin x)\mathrm{e}^{-2x}$ den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' + 4y' + 5y = 8 \cos x$. Ansats $y = a \cos x + b \sin x$ ger

$$y' = -a \sin x + b \cos x, \quad y'' = -a \cos x - b \sin x$$

vilket, insatt i ekvationen, ger

$$(4a + 4b)\cos x + (-4a + 4b)\sin x = 8 \cos x \;\Leftrightarrow\; 4a + 4b = 8 \text{ och } -4a + 4b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 1 \text{ och } b = 1$$

vilket innebär att $y_p = \cos x + \sin x$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$ dvs $y = (A \cos x + B \sin x)\mathrm{e}^{-2x} + \cos x + \sin x$.

Svar: $y = (A \cos x + B \sin x)\mathrm{e}^{-2x} + \cos x + \sin x$.

5. Vi har $\dfrac{x^2 - 13}{(x-3)(x-1)^2} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1}$

”Handpåläggning” ger $A = -1$ och $B = 6$. Insättningen av t.ex $x = 0$ ger sedan $C = 2$.

$$\int_4^7 \frac{x^2 - 13}{(x-3)(x-1)^2}\,dx = \int_4^7 \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \left[-\ln(x-3) - \frac{6}{x-1} + 2\ln(x-1) \right]_4^7 = 1 + \ln 3.$$

Svar: $1 + \ln 3$.