

1. Lös ekvationssystemet:

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ 4x + y + 2z = 9 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 7x + 3y + 2z = 2 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

2. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

skall ha någon lösning?

3. Lös följande ekvationssystem simultant:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 4x + 2y + z = 9 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x + 2y + z = 12 \end{cases}$$

4. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ x - 4y - 5z = c \end{cases}$$

är lösbart om och endast om $c = 13a - 6b$. Lös ekvationssystemet i detta fall.

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = -14 \end{cases}$$

6. För vilka värden på konstanter a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -8 \\ x + z = 2 \\ 3x + 3y + az = b \end{cases}$$

precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

Svar:

1. a. $(x,y,z) = (1,1,2)$. b. Ingen lösning.

2. $a = 3$.

3. $x = 1, y = 2, z = 1$ och $x = 2, y = 1, z = 2$

4. $x = 5a - 2b + t, y = b - 2a - t, z = t$.

5. $x = 5 - t, y = t, z = -8$.

6. Precis en lösning $\Leftrightarrow a \neq 6$.

Oändligt många lösningar $\Leftrightarrow a = 6$ och $b = 0$.

Ingen lösning $\Leftrightarrow a = 6$ och $b \neq 0$.

7. Lös för alla a -värden ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}.$$

8. Bestäm matrisen $(\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B})\mathbf{A}$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Bestäm a, b och c så att $\begin{pmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ b & b & 2b \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Lös matrisekvationen $\mathbf{AX} = \mathbf{A}^T$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Bestäm inverser till följande matriser

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Bestäm inverser till matriser \mathbf{A} , \mathbf{A}^T och \mathbf{A}^2 då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Svar:

7. $a = -1 \Rightarrow$ olösbart, $a \neq -1 \Rightarrow x = \frac{-20}{7(a+1)}$, $y = \frac{11}{7}$, $z = \frac{5a-15}{7(a+1)}$.

8. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$.

10. $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

11. a. $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 4 \\ -14 & 11 & -5 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

29. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z + 2v = 2 \\ 2x + 3y + 2z + v = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 3v = 3 \\ 4x + y + z + 3v = 4 \end{cases}$$

30. Bestäm konstanterna a , b och c så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ 2bx + 2ay + cz = 4 \\ cx + by + 3az = 0 \end{cases}$$

får lösningen $x = 1$, $y = 1$ och $z = -1$.

31. Lös följande ekvationssystem simultant:

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y + z = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$.

32. Lös ekvationssystemet

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 3x + y + z = 12 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

33. Lös följande ekvationssystem simultant:

$$\begin{cases} 2x + z + 2w = 1 \\ 3x + 2y + 2z + w = 2 \\ 4x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + z + 2w = 0 \\ 3x + 2y + 2z + w = 0 \\ 4x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Svar:

29. $(x, y, z, v) = (1, -1, 1, 0)$.

30. $a = 2$, $b = 2$, $c = 4$.

31. a. $x = 1 - t$, $y = t - 1$, $z = t$ och ingen lösning.

b. ingen lösning och $x = 0$, $y = 0$.

32. a. $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. b. Ingen lösning.

33. ingen lösning och $x = 2s - 3t$, $y = s$, $z = 4t - 4s$, $w = t$.

34. För vilka värden på konstanter a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 6y = 6 \\ x + by = 2 \end{cases}$$

precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

Ledning: Tolka ekvationssystemet geometriskt. Varje ekvation beskriver då en rät linje i planet.

35. Bestäm matrisen $(3\mathbf{A} + 2\mathbf{A}^T)^T$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

36. Bestäm matrisen \mathbf{A} så att $(\mathbf{A} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix})^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

37. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\mathbf{A} - \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{A}^T + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Tips: Transponera ledvis någon ekvation.

38. Bestäm alla 2×2 -matriser \mathbf{A} sådana att $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

39. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. För att visa att \mathbf{A} är inversen till \mathbf{B} räcker det att visa att $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

Svar:

34. $ab \neq 6 \Rightarrow$ en; $a = 3$ och $b = 2 \Rightarrow$ oändligt många; $ab = 6$ och $a \neq 3 \Rightarrow$ ingen.

35. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

36. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

37. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

38. Alla matriser på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

40. För vilka värden på konstanter a och b är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en invers till matrisen $\begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$?

41. Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A}(2\mathbf{A}^T - 3\mathbf{B})$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

42. Bestäm $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tips: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1}$.

43. Bestäm matrisen \mathbf{A} då $(2\mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$. Ledning: Transponera ledvis.

45. Beräkna följande determinanter:

a. $\begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ a & a+2 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

46. För vilka värden på konstanten k är matrisen \mathbf{A} inverterbar?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Svar:

40. $a = 2$ och $b = 0$.

41. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

42. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

43. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/5 \\ 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$.

45. a. 2.

- b. 9.

- c. 1.

46. $k \neq -7$.

47. Verifiera att matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

Beräkna $\det(\mathbf{A}^3\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-2})$.

48. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + y + z + av = 1 \\ x + ay + z + 2v = 2 \\ ax + y + z + 2v = 3 \\ x + y + z + av = 4 \end{cases}$$

skall ha precis en lösning?

49. Är punkterna $(3,7,-2)$, $(5,5,1)$, $(6,-2,2)$ och $(4,0,-1)$ hörn i en parallelogram?
50. Bestäm projektionen och dess längd av vektorn $(5,3,2)$ på vektorn $(2,2,1)$.
51. Uppdela vektorn $(3,2,-1)$ i två vinkelräta komponenter, av vilka den ena är parallell med vektorn $(2,1,2)$.
52. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x -, y - och z -axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.
53. Visa att vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är ortogonala om och endast om vektorerna \mathbf{u} och \mathbf{v} har samma längd.
54. Kraften $\mathbf{F} = (9,4,5)$ påverkar en kropp belägen i punkten $P = (2,0,0)$. Kroppen rör sig rätlinjigt mot punkten $Q = (3,2,2)$. Hur stor är kraften i vägens riktning?

Svar:

47. 36.
48. $a \neq 1$ och $a \neq 2$.
49. Ja.
50. $(4,4,2)$; 6.
51. $\frac{2}{3}(2,1,2)$ och $\frac{1}{3}(5,4,-7)$.
52. $(1, -\sqrt{2}, -1)$.
54. $(3,6,6)$.

- Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna $(1,1,2)$, $(2,2,1)$ och $(1,0,1)$.
- Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallellt med planet $x - 2y + z = 1$. Bestäm planets ekvation.
- Ett plan går genom punkten $(1,2,3)$ och är vinkelrät med skärningslinjen mellan planen $x + y + 2z = 9$ och $2x + 3y + z = 11$. Bestäm planets ekvation.
- Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(3,1,0)$ och linjen $\mathbf{r}(t) = (1 - t, 1 + t, 1 + t)$.
- Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(2,1,3)$ och som är vinkelrätt mot linjen $\mathbf{r}(t) = (t + 1, 1 + 2t, 2t + 1)$.
- Bestäm ekvationen för skärningslinjen mellan planen $3x + y + 2z = 1$ och $x - 2y + z = 0$.
- Planet P går genom punkten $(3,2,1)$ och är parallellt med de båda linjerna $\mathbf{p}(t) = (t, 2t + 1, 1 + t)$ och $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, 1 + t, 2t + 2)$. Bestäm planets ekvation. Beräkna också avståndet mellan planet och den första linjen.
- Beräkna avståndet mellan linjen $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t, 3 + t, -2t)$ och planet $x - y + z = 4$.
- Bestäm avståndet från det plan som går genom punkterna $(4,3,2)$, $(6,0,0)$ och $(-2,8,4)$ till punkten $(5,4,2)$.
- Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(1,2,3)$ och som skär linjen $(x,y,z) = (6,0,4) + t(3,-2,3)$ vinkelrätt.
- Skriv på formen $a + bi$, där a och b är reella $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{3i}{1 + 2i}$
- Skriv på polär form $1 + i\sqrt{3}$.
- Skriv $e^{3\pi i/2}$ på formen $a + bi$, där a och b är reella.

Svar:

- | | |
|--|--|
| 1. $2x - y + z = 3$. | 9. $2\sqrt{3}$. |
| 2. $x - 2y + z = 3$. | 10. 1. |
| 3. $5x - 3y - z + 4 = 0$. | 11. $(1 + 2t, 2, 3 - 2t)$. |
| 4. $x - y + 2z = 2$. | 12. $1 + i$. |
| 5. $x + 2y + 2z = 10$. | 13. $2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$. |
| 7. $\mathbf{r}(t) = (1 - 5t, t, 7t - 1)$. | 14. $z = 1 - i, w = 2 + i$. |
| 8. $x - z = 2, \frac{3\sqrt{2}}{2}$. | |

15. Skriv på polär form $\frac{(\sqrt{3} + 3i)^4}{(1 - i)^6}$
16. Lös ekvationen (rötterna skall anges på formen $a + bi$, där a och b är reella)
- a. $z^2 = 8 - 6i$. b. $z^4 = -4$.
17. Lös ekvationen $z^2 - (4 - 4i)z - 10i = 0$.
18. Lös ekvationen $(1 + i)z^2 + (2i - 2)z + 6 - 2i = 0$.
19. Bestäm talet a så att ekvationen $z^3 - az^2 - 2iz + a + 5i = 0$ får roten $z = a$. Bestäm de övriga rötterna.
20. Uppdela så långt som möjligt i reella faktorer $z^4 - 6z^2 + 25$.
21. Lös ekvationen $z^4 - (6 - 6i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
22. Man vet att $z = 1 + i$ är en rot till den nedanstående ekvationen. Bestäm de övriga rötterna.
- a. $z^3 + (-1 - i)z^2 + z - 1 - i = 0$
- b. $z^3 - 5z^2 + 8z - 6 = 0$.

Svar:

15. $18(\cos(-7\pi/6) + i \sin(-7\pi/6))$.
16. a. $3 - i, -3 + i$. b. $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$.
17. $3 - i, 1 - 3i$.
18. $-1 - 3i, 1 + i$.
19. $a = 2 - i$. De övriga rötterna är $1 + i$ och $-1 - i$.
20. $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z + 5)$.
21. $3 - i, -3 + i, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$.
22. a. $\pm i$ b. $3, 1 - i$.

30. För vilka värden på konstanten a är planen
 $ax + y + 2z = 1$ och $6x + (a - 1)y + (a + 1)z = 1$
 a. vinkelräta
 b. parallella?
31. Linjen L går genom punkterna $(1,1,0)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(2,3,4)$ och är parallell med linjen L . Bestäm de båda linjernas ekvationer.
32. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallellt med de båda linjerna $\mathbf{r}(t) = (t + 1, 1 + 2t, 2t + 1)$ och $\mathbf{p}(t) = (2t + 3, 2 + t, t + 2)$. Bestäm planets ekvation.
33. Ett plan, P , ligger på avståndet 1 från planet $2x + 3y + 6z = 7$. Bestäm P 's ekvation.
34. Linjen L går genom punkterna $(1,1,2)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(1,1,5)$ och skär linjen L under rät vinkeln. Bestäm de båda linjernas ekvationer.
35. Ett plan går genom punkterna $A = (5,1,4)$ och $B = (3,1,3)$ och är parallellt med linjen $\mathbf{r}(t) = (3 + t, 2 + t, 5 + 2t)$. Bestäm planets ekvation.
36. Skriv på formen $a + bi$, där a och b är reella,
 a. $(2 + i)(1 - 2i)^2$. b. $\frac{(2 + i)(3 + i)}{4 - i}$
37. Lös ekvationerna
 a. $(2 - i)z = 3 + i$. b. $(2 + i)\bar{z} = 1 + 3i$ c. $(2 + i)\bar{z} + iz = 2 - 2i$.
38. Skriv på polär form
 a. $1 - i$ b. $\sqrt{3} + i$

Svar:

30. a. $-1/9$. b. 3.
31. $L: (x,y,z) = (1 + t, 1 + t, t)$. $K: (x,y,z) = (2 + t, 3 + t, 4 + t)$.
32. $z - y = 2$.
33. $2x + 3y + 6z = 0$ eller $2x + 3y + 6z = 14$.
34. $L: (x,y,z) = (2 - t, 2 - t, 1 + t)$. $K: (x,y,z) = (t, t, 2t + 3)$.
35. $x + 3y - 2z = 0$
36. a. $-2 - 11i$. b. $\frac{15}{17} + \frac{25i}{17}$.
37. a. $1 + i$. b. $1 - i$. c. $1 + 2i$.
38. a. $\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$. b. $2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6))$.

39. Bestäm argumentet för $\frac{(3 + i\sqrt{3})^4}{(1 - i)^8}$.
40. Bestäm absolutbeloppet av $\frac{(3 - 2i)(1 - i)}{(2 + i)^2}$.
41. Skriv på polär form $\frac{(2 + 2i)(1 + i\sqrt{3})}{(\sqrt{12} - 2i)i}$
42. Lös ekvationen $(z - 1)^3 + 8i = 0$.
43. Lös ekvationen $z\bar{z} - z = 1 - i$. (\bar{z} är konjugatet till z .)
Tips: Sätt $z = a + bi$.
44. Lös ekvationen $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$.
45. Bestäm en polynomekvation av lägsta möjliga grad, som
a. har rötterna $1 - 2i$ och i .
b. har rötterna $1 - 2i$ och i samt reella koefficienter.
46. Ange summan resp. produkten av rötterna till ekvationen
a. $z^2 + (3 - 2i)z + 1 - 3i = 0$.
b. $z^3 - (6 - 3i)z^2 + (8 - 12i)z + 10i = 0$.
47. Två av rötterna till ekvationen $z^3 - (2 + 3i)z^2 - (4 - 4i)z + 4 + 2i = 0$ har produkten $1 + 3i$. Lös ekvationen.
48. Ekvationerna $z^3 - (1 - i)z^2 - 8iz + 8 + 8i = 0$ och $z\bar{z} - z = 1 + i$ har en rot gemensam. Lös den första ekvationen.

Svar:

39. $2\pi/3$.
40. $\sqrt{26/5}$.
41. $\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$.
42. $1 + \sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3} - i, 1 + 2i$.
43. $i, 1 + i$.
44. $1 + 3i, -1 + i$
45. a. $z^2 - (1 - i)z + 2 + i = 0$. b. $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5 = 0$.
46. a. summan = $-3 + 2i$, produkten = $1 - 3i$.
b. summan = $6 - 3i$, produkten = $-10i$.
47. $1 + i, 2 + i$ och $-1 + i$.
48. $1 - i, 2 + 2i, -2 - 2i$

1. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

a. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

b. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin \frac{-1}{2}$

c. $\cos \arcsin \frac{1}{4}$

2. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

a. $\sin\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

b. $\cot \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$

c. $\cos\left(2 \arccos \frac{2}{3}\right)$

3. Lös ekvationen $2 \arcsin x = \arccos x$.

4. Visa att $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$.

5. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$.

6. Finns det något värde på konstanten A så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x^4}} & \text{då } x \neq 0 \\ A & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i punkten $x = 0$?

7. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + 3x) - \ln(1 + x))$.

8. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

b. $(\sin x + \cos x) \sin x$

c. $(1 + 2x)^9$

Svar:

1. a. $-\pi/4$

b. $\pi/6$

c. $\sqrt{15}/4$

2. a. $4/5$

b. $1/2$

c. $-1/9$

3. $1/2$

5. $1/2$

6. Nej.

7. $\ln 3$.

8. a. $\frac{1}{1 + \sin 2x}$

b. $\sin 2x + \cos 2x$

c. $18(1 + 2x)^8$

17. Visa följande olikheter:
- $2 \ln x \leq x^2 - 1$, för alla $x \geq 0$.
 - $\ln(1 + 2x) \geq \frac{3x}{x + 2}$, för alla $x \geq 0$.
 - $\sin x + \cos x \leq 1 + 2x$, för alla $x \geq 0$.
18. Visa att funktionen f är inverterbar
- $f(x) = 3x - \arctan 2x$.
19. Bestäm i förekommande fall det största och det minsta värdet till följande funktioner:
- $f(x) = \ln(x + 1) - 2 \arctan \sqrt{x}$.
 - $f(x) = \frac{-2x}{4x^2 + 1} + \arctan 2x$.

Svar:

19. a. $\min = \ln 2 - \pi/2$, max saknas.
b. Max och min saknas.

27. Bestäm värdet på konstanten a så att $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + a}{x - 1}$ är ändligt och beräkna gränsvärdet.
28. Kan funktionen f definieras i punkten $x = 1$ så att f blir kontinuerlig i denna punkt?
- a. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{då } 1 < x < 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \\ x^2 + x - 6 & \text{då } x < 1 \end{cases}$ b. $f(x) = \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$
29. Visa att ekvationen $x^6 + 3x + 1 = 0$ har minst en reell lösning.
30. Visa att kurvorna $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ och $y = x^4 + x^3 - 2x + 4$ har minst en gemensam skärningspunkt.
31. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:
- a. $\frac{4x + 5}{2x + 3}$ d. $2\sqrt{1+x} + \sqrt{1+2x}$ f. $\sin^9 x$
32. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan
- a. $y = (1-x)^9(2x-3)^8$ i punkten $(2, -1)$.
33. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:
- a. $\cos^2 \frac{1}{x}$. b. $x^{\sin x}$.
34. Beräkna derivatorna $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{d^2y}{dx^2}$ uttryckta i x och y då funktionen $y = y(x)$ definieras av:
- a. $x^3y^3 + xy = 1$. b. $\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 1$.

Svar:

27. $a = -2$, gränsvärdet = 3.
28. a. Ja, $f(1) = -4$. b. Nej.
31. a. $\frac{2}{(2x+3)^2}$ d. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ f. $9 \cos x \sin^8 x$
32. a. Tangent: $25x + y = 49$. Normal: $x - 25y = 27$.
33. a. $\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$ b. $x^{\sin x - 1}(x \cos x \ln x + \sin x)$
34. a. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$ b. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

35. Det finns en punkt på kurvan

$$y = x + 2 + \frac{1}{5} \ln(x + 1) - \frac{1}{10} \ln(4x^2 + 1) - \frac{1}{10} \arctan 2x$$

där tangenten till kurvan bildar vinkeln $\frac{\pi}{4}$ med x-axel. Bestäm en ekvation för denna tangent.

36. Det finns en punkt på kurvan

$$y = 2 - x + \frac{4}{5} \ln(x + 1) + \frac{1}{10} \ln(4x^2 + 1) - \frac{2}{5} \arctan 2x$$

där normalen till kurvan bildar vinkeln $\frac{\pi}{4}$ med x-axel. Bestäm en ekvation för denna normal.

37. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\sin^9 2x$

b. $(x - x^2)e^{-x}$

c. $(2x + 1)^3(1 - x)^4$

38. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:

a. $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$.

b. $f(x) = x + \arctan(1 - 2x)$.

c. $f(x) = x + \ln(2 - 2x + x^2)$.

d. $f(x) = 4x + 5 \ln(2 - 2x + x^2)$.

39. Ekvationen $x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$ definierar en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 1$. Bestäm derivatan $y'(x)$ uttryckt i x och y . Visa att $x = 1$ är en lokal extrempunkt till y och bestäm dess karaktär.

40. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen $f(x) = 6 \ln(1 + 2x) - \ln(1 + 4x^2) - 6 \arctan 2x$.

41. Bestäm största och minsta värdena till följande funktioner:

a. $4\sqrt{1 - x^2} + 3x$.

b. $x^2 - 4|x - 1| - 2x$, $0 \leq x \leq 4$.

42. Visa olikheten $e^{-x} \geq 1 - x$, för alla x .

Svar:

35. $y = x + 2$.

36. $y = x + 2$.

37. a. $18 \cos 2x \sin^8 2x$

b. $(1 - 3x + x^2)e^{-x}$

c. $2(7x - 1)(2x + 1)^2(x - 1)^3$

38. a. Lok min i 1 och 3, lok max i 2.

b. Lok max i 0, lok min i 1.

c. Finns inga.

d. Lok max i -1, lok min i 1/2.

39. $y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$, $x = 1$ är en lokal minimipunkt.

40. Lok max i 0, lok min i 1.

41. a. 5 och -3.

b. -1 och -5.

- Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
 - $f(x) = \sin 3x$.
 - $f(x) = \ln(1 + 2x)$.
 - $f(x) = \ln(1 + 2x) \sin 3x$. (Använd 1a och b.)
- Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
 - $f(x) = \ln(3 + 2x)$ kring $x = 0$
 - $f(x) = \ln(1 + 2x)$ kring $x = 1$ (Använd 2b.)
- Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
 - $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$ kring $x = 0$
 - $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$ kring $x = -1$
- Beräkna följande gränsvärden:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x + \sin 3x}{\ln(1 - 4x) + 5x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \sin 3x}{1 - e^{2x}}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{3x}}{e^{-x} - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arctan 2x - 2 \ln(1 + 3x)}{1 - \cos 4x}$
- Beräkna följande gränsvärden:
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \ln(3 + 4x^5) - 5 \ln(4 + 3x^2))$ (Skriv på formen $\ln(\text{bråk})$.)
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$ (Använd $a^b = e^{b \ln a}$.)
- Bestäm eventuella asymptoter till kurvorna:
 - $y = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1} - x^2$
- Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
 - $y'' - y' - 2y = 2x + 1$.
 - $y'' + 6y' + 9y = 27x$.

Svar:

- $3x - 9x^3/2 + O(x^4)$.
 - $2x - 2x^2 + 8x^3/3 + O(x^4)$.
 - $6x^2 - 6x^3 + O(x^4)$.
- $\ln(3) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + O(x^3)$
 - $\ln(3) + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{2}{9}(x - 1)^2 + O((x - 1)^3)$
- $1 - 2x + 4x^2 + O(x^3)$
 - $-1 - 2(x + 1) - 4(x + 1)^2 + O((x + 1)^3)$
- 5.
 - 2.
 - 3.
 - 9/8.
- $4 \ln 2 - 5 \ln 3$.
 - e^2 .
- $y = 3$.
- $y = -x + Ae^{-x} + Be^{2x}$
 - $y = e^{-3x}(A + Bx) + 3x - 2$

14. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{2-x}$ och $y = x\sqrt{2-x}$.

15. Beräkna följande integraler:

a. $\int_{-1}^1 (1-2x)e^{-2x} dx$

b. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$

c. $\int_0^1 \ln(x+1) dx$

d. $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$

16. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \frac{5}{9-x^2}$ och $y = \frac{8}{4+x^2}$.

17. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^1 (2x+1) \arctan \sqrt{x} dx$

b. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \sin^3 x} dx$

c. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x} dx$

18. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^1 \ln(x^2+1) dx$

b. $\int_0^1 x \arctan x dx$

19. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av x -axeln och kurvan $y = (x-3)\sqrt{4-x}$.

Svar:

14. 4/15.

15. a. $e^2 + e^{-2}$.

b. 4π .

c. $2 \ln 2 - 1$.

d. $1/4$

g. -2

h. $3 \ln 5 - 4 \ln 2$

16. $2\pi - (5 \ln 5)/3$.

17. a. $\pi/2 - 1/3$.

b. $(\ln 5 - \ln 2)/2$.

c. $1 + \ln 2 - \ln 3$.

18. a. $\ln 2 - 2 + \pi/2$

b. $\pi/4 - 1/2$

19. 4/15.

1. Beräkna följande integraler:

a. $\int_4^5 \frac{3x-7}{x^2-5x+6} dx$

b. $\int_4^5 \frac{3x^2-7x-4}{(x-3)(x-2)^2} dx$

c. $\int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx$

d. $\int_5^6 \frac{x^2-5x+10}{x^2-6x+8} dx$

e. $\int_0^1 \frac{x^2-10x+11}{(x-3)(x^2+1)} dx$

f. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+16 \sin^2 x} dx$

g. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{1+\cos^2 x} dx$

h. $\int_0^1 \sqrt{4x-x^2} dx$

2. Beräkna derivatan $\frac{dF}{dx}$ då $F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$.

3. Beräkna arean av det området som begränsas av

a. kurvan $y = x\sqrt{1-x^2}$ och x -axeln.

b. kurvan $y^2 = x^2 - x^3$.

4. Beräkna följande generaliserade integraler:

a. $\int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$

b. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)x^2} dx$

5. Beräkna arean av det oändliga området som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$.

6. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan $y^2 = x^2(1-x^2)$.

Svar:

1. a. $\ln 6$. b. $1 + \ln 6$. c. $3 \ln 5 - 4 \ln 2$

d. $1 + 2 \ln 3 - \ln 2$. e. $\ln 3 - \pi$. f. $\frac{1}{4} \arctan 4$

g. $(\ln 3 - \ln 2)/2$. h. $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$.

2. $\sin x^2$

3. a. $2/3$. b. $8/15$.

4. a. $\pi/4$. b. $1 - \pi/4$.

5. 2.

6. $4/3$.

7. Beräkna volymen av den kropp som uppstår vid rotation av området
- mellan kurvan $y = \sqrt{1-x}$ och koordinataxlarna kring x -axeln.
 - mellan kurvan $y = \sqrt{1-x}$ och koordinataxlarna kring y -axeln.
8. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan y -axeln och kurvorna $y = \cos x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/4$, roterar ett varv
- kring x -axeln.
 - kring y -axeln.
9. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av
- x -axeln och kurvorna $y = \tan x$, $y = \cot x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.
 - y -axeln och kurvorna $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.
 - y -axeln och kurvorna $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.
10. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då ytstycket mellan linjen $x = 1$ och kurvan $y^2 = 4x$ roterar ett varv kring linjen $y = 2$.
11. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av x -axeln och kurvan $y = (x-1)\sqrt{2x-x^2}$ roterar ett varv kring linjen $x = 1$.
12. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+7}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

Svar:

7. a. $\pi/2$. b. $8\pi/15$.
8. a. $\pi/2$. b. $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2} - 2\pi$
9. a. $\ln 2$. b. $\ln 2$. c. $2 - \sqrt{2}$
10. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.
11. $\pi^2/4$.
12. a. Konvergent b. Divergent.
c. Divergent. d. Konvergent.

13. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + n^2}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}$

14. Avgör om följande serier är absolut konvergenta, betingat konvergenta eller divergenta:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 3}$

15. Undersök konvergensen av följande generaliserade integraler:

a. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx$

b. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{1 + x^2} dx$

Svar:

13. a. Divergent.

b. Divergent.

c. Konvergent.

d. Divergent.

14. a. Betingat konvergent.

b. Absolut konvergent.

15. a. konvergent

b. konvergent

16. Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ på intervallet $0 \leq x \leq 3$.

17. Beräkna derivatan $\frac{dF}{dx}$ då $F(x) = \int_{2x}^{3x} \sin t^2 dt$.

18. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx$

b. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x} dx$

c. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx$

d. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$

19. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{1-4x^2}$ och $y = \sqrt{1-2x}$.

20. Beräkna följande generaliserade integraler:

a. $\int_1^{\infty} \frac{1+5x^2}{(1+x^2)x^2} dx$

b. $\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2} dx$

21. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan x -axeln och kurvan $y = \pi/2 - \frac{\arcsin x}{x}$ roterar ett varv kring y -axeln.

22. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{5^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)^2$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2000+1999n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2+1)\sqrt{n}}$

Svar:

16. a. $\frac{1}{4} \arctan 4$ b. $(\ln 3 - \ln 2)/2$ c. $\pi/6$ d. $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$.

17. $3 \sin 9x^2 - 2 \sin 4x^2$.

18. a. $(\ln 3)/4$.

b. $\ln 3 - \ln 2$.

c. $\pi\sqrt{3}/9$.

d. $-\ln(\sqrt{2}-1)$

19. $\pi/8 - 1/3$.

20. a. $1 + \pi$.

b. $1/2$.

21. $2\pi - \pi^2/2$.

22. a. Divergent.

b. Konvergent.

c. Divergent.

d. Konvergent.

23. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+2n}\right)^n$

24. Undersök konvergensen av följande generaliserade integraler:

a. $\int_0^1 \frac{e^x}{1-\sqrt{x}} dx$

b. $\int_0^1 \frac{1}{x(1+x^4)} dx$

25. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^3 \frac{x^2}{9+x^2} dx$

b. $\int_1^5 |x-2| dx$

c. $\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

d. $\int_0^2 (2x-3) \ln(3-x) dx$

26. Beräkna följande integraler:

a. $\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2} dx$

b. $\int_3^4 \frac{x}{x^3-5x^2+8x-4} dx$

c. $\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8} dx$

d. $\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)x^2} dx$

e. $\int_3^4 \frac{x^2-x-1}{x^2-3x+2} dx$

Svar:

- | | | | | | |
|--------|--------------------|----|---------------------------|----|--------------|
| 23. a. | Konvergent. | b. | Konvergent | c. | Konvergent |
| 24. a. | divergent | b. | divergent | | |
| 25. a. | $3 - 3\pi/4$ | b. | 5. | c. | $1/2.$ |
| | | | | d. | -2 |
| 26. a. | $3 \ln 2 - \ln 3.$ | b. | $1 + \ln 3 - 2 \ln 2.$ | c. | $\pi/8.$ |
| | d. | | $1/2 - \arctan 2 + \pi/4$ | e. | $1 + \ln 3.$ |