Lösningar till kompletteringstentamen i envariabel 16/6 2006.

1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 1/(x+h)^2 - x^2 - 1/x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} + \dfrac{1}{h}\dfrac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2}\right) =$
$\lim\limits_{h\to 0}\left(2x+h+\dfrac{-2x-h)}{(x+h)^2x^2}\right) = \underline{2x - \dfrac{2}{x^3}}.$

2. Ekvation: $x^3+3x^2y+2xy^2+y^3=-1$.
Derivering med avseende på x $(y=y(x))$ ger:
$3x^2+6xy+3x^2y'+2y^2+4xyy'+3y^2y'=0 \quad x=1,\ y=-1$ insätts:
$3-6+3y'+2-4y'+3y'=0$
$-1+2y'=0, \quad y'(1)=1/2.$
Tangentens lutning är alltså $k=1/2$ i punkten $(x,y)=(1,-1)$.
Tangentens ekvation: $y-(-1)=(1/2)(x-1)$ eller $\underline{2y-x+3=0}$.

3. $f(x)=\ln(x^2+3)-\ln(x^2+3x)$ i intervallet $1\le x\le 4$.

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2x+3}{x^2+3x}=\frac{2x^3+6x^2-2x^3-3x^2-6x-9}{N}=$$

$\dfrac{3x^2-6x-9}{N}=\dfrac{3(x+1)(x-3)}{N}=0$ endast för $x=3$ i intervallet. Faktoriseringen av f' visar att $f'<0$ för $1\le x<3$ och $f'>0$ för $4\ge x>3$.
Detta visar att $f(1)=\ln(2/3)$ är lokalt minimum och att ändpunkterna ger lokala maxima: $f(1)=\ln 1=0,\ f(4)=\ln 19/28<0$.
Man får $f_{min}=f(3)=\ln(2/3)$ och $f_{max}=f(1)=0$.

4. $y''+4y'+7y=11$ har den karakteristiska ekvationen $r^2+4r+7=0$ med lösningen $r=-2\pm\sqrt{4-7}=2\pm i\sqrt{3}$
Homogen lösning alltså: $y_H=e^{-2x}(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x)$.
Partikulärlösning: Ansätt $y_P=a$. Man får $0+0+7a=11, \quad y_P=11/7$.
Allmän lösning: $\underline{y=e^{-2x}(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x)+11/7}$.

5. $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\ dx}{6+4\cos x-\sin^2 x}=$

$\left[\sin^2 x = 1-\cos^2 x\right] = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{5+4\cos x+\cos^2 x}=$

$\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx\end{array} = \displaystyle\int_1^0\frac{-dt}{t^2+4t+5}0=\int_0^1\frac{dt}{(t+2)^2+1}=$

$\Big[\arctan(t+2)\Big]_0^1 = \underline{\arctan 3-\arctan 2}.$