Modul 1: Komplexa tal och Polynomekvationer

1. Skriv på formen $a + b\mathrm{i}$, där a och b är reella,

   a. $(2 + \mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})^2$.   b. $\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}} + \dfrac{3\mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i}}$

2. Lös ekvationerna

   a. $(2 - \mathrm{i})z = 3 + \mathrm{i}$.   b. $(2 + \mathrm{i})\overline{z} = 1 + 3\mathrm{i}$ c. $(2 + \mathrm{i})\overline{z} + \mathrm{i}z = 2 - 2\mathrm{i}$.

3. Skriv på polär form

   a. $\dfrac{(2 + 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})}{(\sqrt{12} - 2\mathrm{i})\mathrm{i}}$ b. $\dfrac{(\sqrt{3} + 3\mathrm{i})^4}{(1 - \mathrm{i})^6}$

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -\mathrm{i}z + (1 + \mathrm{i})w = 2\mathrm{i} \\ (1 + \mathrm{i})\overline{z} + (2 - \mathrm{i})\overline{w} = 3 - 2\mathrm{i} \end{cases}.$$

5. Lös ekvationen

   a. $z^2 = 8 - 6\mathrm{i}$.   b. $z^4 + 4 = 0$.   c. $(z - 1)^3 + 8\mathrm{i} = 0$.

6. Bestäm en polynomekvation av lägsta möjliga grad, som

   a. har rötterna $1 - 2\mathrm{i}$ och i.

   b. har rötterna $1 - 2\mathrm{i}$ och i samt reella koefficienter.

7. Ange summan resp. produkten av rötterna till ekvationen

   a. $z^2 + (3 - 2\mathrm{i})z + 1 - 3\mathrm{i} = 0$.

   b. $z^3 - (6 - 3\mathrm{i})z^2 + (8 - 12\mathrm{i})z + 10\mathrm{i} = 0$.

8. Två av rötterna till ekvationen $z^3 - (2 + 3\mathrm{i})z^2 - (4 - 4\mathrm{i})z + 4 + 2\mathrm{i} = 0$ har produkten $1 + 3\mathrm{i}$. Lös ekvationen.

9. a. Lös ekvationen $z\overline{z} - z = 1 - \mathrm{i}$. ($\overline{z}$ är konjugatet till w.)
   Tips: Sätt $z = a + b\mathrm{i}$.

   b. Ekvationerna $z^3 - (1 - \mathrm{i})z^2 - 8\mathrm{i}z + 8 + 8\mathrm{i} = 0$ och $z\overline{z} - z = 1 - \mathrm{i}$ har en rot gemensam. Lös den första ekvationen.

10. Lös ekvationen

    a. $z^2 - (4 - 4\mathrm{i})z - 10\mathrm{i} = 0$.

    b. $z^4 - (6 - 6\mathrm{i})z^2 - 16 + 12\mathrm{i} = 0$.

11. Man vet att $z = 1 + \mathrm{i}$ är en rot till den nedanstående ekvationen. Bestäm de övriga rötterna.

    a. $z^3 + (-1 - \mathrm{i})z^2 + z - 1 - \mathrm{i} = 0$

    b. $z^3 - 5z^2 + 8z - 6 = 0$.

12. Bestäm talet a så att ekvationen $z^3 - az^2 - 2\mathrm{i}z + a + 5\mathrm{i} = 0$ får roten $z = a$. Bestäm de övriga rötterna.

13. Visa att polynomet $(z-w)(z-\overline{w})$ har reella koefficienter. ($\overline{w}$ är konjugatet till w.)

14. Uppdela så långt som möjligt i reella faktorer

a. $z^4 - 6z^2 + 25$. b. $z^6 - 7z^3 - 8$.

.

<u>Svar:</u>

1. a. $-2 - 11\mathrm{i}$. b. $1 + \mathrm{i}$.
2. a. $1 + \mathrm{i}$. b. $1 - \mathrm{i}$. c. $1 + 2\mathrm{i}$.
3. a. $\sqrt{2}(\cos\pi/4 + \mathrm{i}\sin\pi/4)$. b. $18(\cos(-7\pi/6) + \mathrm{i}\sin(-7\pi/6))$.
4. $z = 1 - \mathrm{i}$, $w = 2 + \mathrm{i}$.
5. a. $3 - \mathrm{i}$, $-3 + \mathrm{i}$. b. $1 + \mathrm{i}$, $1 - \mathrm{i}$, $-1 + \mathrm{i}$, $-1 - \mathrm{i}$.
   c. $1 + \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $1 - \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $1 + 2\mathrm{i}$.
6. a. $z^2 - (1 - \mathrm{i})z + 2 + \mathrm{i}$. b. $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$.
7. a. summan $= -3 + 2\mathrm{i}$, produkten $= 1 - 3\mathrm{i}$.
   b. summan $= 6 - 3\mathrm{i}$, produkten $= -10\mathrm{i}$.
8. $1 + \mathrm{i}$, $2 + \mathrm{i}$ och $-1 + \mathrm{i}$.
9. a. i, $1 - \mathrm{i}$. b. $1 - \mathrm{i}$, $2 + 2\mathrm{i}$, $-2 - 2\mathrm{i}$
10. a. $3 - \mathrm{i}$, $1 - 3\mathrm{i}$. b. $3 - \mathrm{i}$, $-3 + \mathrm{i}$, $\mathrm{i}\sqrt{2}$, $-\mathrm{i}\sqrt{2}$.
11. a. $\pm\mathrm{i}$ b. 3, $1 + \mathrm{i}$.
12. $a = 2 - \mathrm{i}$. De övriga rötterna är $1 + \mathrm{i}$ och $-1 - \mathrm{i}$.
14. a. $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z + 5)$. b. $(z - 2)(z + 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + 2z + 4)$.

Modul 2: Gausselimination –Matriser–Determinanter

1. Lös ekvationssystemet

a. $\begin{cases} 2x+\ \ y+z=\ \ 9 \\ 3x+\ \ y+z=12 \\ \ \ x+2y+z=\ \ 8 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x+\ \ y+3z=1 \\ 2x+3y+2z=2 \\ 2x+\ \ y+2z=3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x+2y+\ \ z=\ \ 2 \\ 3x+3y+2z=-1 \\ 2x+2y+3z=-14 \end{cases}$

2. För vilka värden på konstanter a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x+3y+2z=-8 \\ x\qquad\ +\ z=\ \ 2 \\ 3x+3y+az=\ \ b \end{cases}$$

precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

3. Lös för alla a–värden ekvationssystemet $\begin{cases} -2x+\ \ y+2z=3 \\ ax+2y+\ \ z=1 \\ x+3y-\ \ z=4 \end{cases}$.

4. Lös följande ekvationssystem simultant:

a. $\begin{cases} 2x+\ \ y+\ \ z=5 \\ 3x+\ \ y+2z=7 \\ 4x+2y+\ \ z=9 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x+\ \ y+\ \ z=\ \ 7 \\ 3x+\ \ y+2z=11 \\ 4x+2y+\ \ z=12 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x+\ \ y+\ \ z=1 \\ 3x+\ \ y+2z=2 \\ 4x+3y+\ \ z=1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x+\ \ y+\ \ z=2 \\ 3x+\ \ y+2z=1 \\ 4x+3y+\ \ z=2 \end{cases}$.

5. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 3x-\ \ y+2z=a \\ x-5y+8z=1 \end{cases}$

skall ha någon lösning?

6. Bestäm matrisen $(3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ där $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Bestäm matrisen $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ där $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ där $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. För att visa att $\boldsymbol{A}$ är inversen till $\boldsymbol{B}$ räcker det att visa att $\boldsymbol{AB} = \mathrm{I}$.

10. Bestäm inverser till följande matriser

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. För vilka värden på konstanter a och b är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en invers till matrisen $\begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$?

12. Bestäm inversen till matrisen $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - 3\boldsymbol{B})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A}X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. Multiplicera ledvis, från vänster med $\boldsymbol{A}^{-1}$. I vänsterledet får man $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}X = X$. Lösningen fås ur $X = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot$ den givna matrisen.

14. För vilka reella a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverterbar?

15. Bestäm för varje a–värde antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

16. Bestäm $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tips: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{BA})^{-1}$.

17. Beräkna $\det(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})$ och $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Svar:

1. a. $x = 3,\ y = 2,\ z = 1.$

   b. Ingen lösning.

   c. $x = 5 - t,\ y = t,\ z = -8.$

2. Precis en lösning $\Leftrightarrow a \neq 6.$

   Oändligt många lösningar $\Leftrightarrow a = 6$ och $b = 0.$
   Ingen lösning $\Leftrightarrow a = 6$ och $b \neq 0.$

3. $a = -1 \Rightarrow$ olösbart, $a \neq -1 \Rightarrow x = \dfrac{-20}{7(a+1)}\ ,\ y = \dfrac{11}{7}\ ,\ z = \dfrac{5a - 15}{7(a+1)}\ .$

4. a. $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$ och $x = 2,\ y = 1,\ z = 2$

   b. $x = 1 - t,\ y = t - 1,\ z = t$ och ingen lösning.

   c. ingen lösning och $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

   d. ingen lösning och $x = 2s - 3t,\ y = s,\ z = 4t - 4s,\ w = t.$

5. $a = 3.$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$

10. a. $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$ b. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

11. $a = 2$ och $b = 0.$

12. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

13. $X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{pmatrix}$

14. $a \neq 4$

15. $a \neq -1$ och $a \neq 3 \Rightarrow$ en lösning, $a = -1 \Rightarrow$ ingen lösning, $a = 3 \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

16. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$

17. 0 resp 29.

Modul 3
Vektorer och skalärprodukt,Vektorprodukt, linjer & plan

1. Är punkterna $(3,7,-2)$, $(5,5,1)$, $(6,-2,2)$ och $(4,0,-1)$ hörn i en parallellogram?

2. Bestäm talet a så att
   a. vektorerna $\boldsymbol{u} = (a,2,a+2)$ och $\boldsymbol{v} = (a+1,a+3,6)$ är parallella.
   b. vektorerna $\boldsymbol{u} = (a,a,a+2)$ och $\boldsymbol{v} = (a+1,a+3,a-3)$ är ortogonala.
   c. vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,1,0)$ och $\boldsymbol{v} = (a,a-1,a)$ bildar vinkel $\pi/4$.

3. Visa att vektorerna $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ är ortogonala om och endast om vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ har samma längd.

4. Kraften $\boldsymbol{F} = (9,4,5)$ påverkar en kropp belägen i punkten $P = (2,0,0)$. Kroppen rör sig rätlinjigt mot punkten $Q = (3,2,2)$. Hur stor är kraften i vägens riktning?

5. Uppdela vektorn $(3,2,-1)$ i två vinkelräta komposanter, av vilka den ena är parallell med vektorn $(2,1,2)$.

6. Låt $\boldsymbol{u} = (1,1,2)$ och $\boldsymbol{v} = (2,1,1)$. Beräkna

   a. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ b. $\boldsymbol{v} \times 2\boldsymbol{u}$

   c. $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u}$ d. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$

7. a. Beräkna arean av triangeln ABC då $A = (2,2,1)$, $B = (2,3,2)$ och $C = (6,5,2)$.
   b. Ligger punkten $D = (4,5,3)$ i det plan som går genom punkterna A, B, C?

8. En parallellepiped har fyra av sina hörn i punkterna $(1,1,2)$, $(2,1,0)$, $(0,1,1)$ och $(1,2,3)$. Beräkna dess volym.

9. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna $(1,1,2)$, $(2,2,1)$ och $(1,0,1)$. Beräkna också avståndet från punkten $(6,-1,2)$ till detta plan.

10. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(3,1,0)$ och linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1-t,\ 1+t,\ 1+t)$.

11. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallell med planet $x - 2y + z = 1$. Bestäm planets ekvation.

12. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är vinkelrätt mot linjen $\boldsymbol{r}(t) = (t+1,\ 1+2t,\ 2t+1)$. Bestäm planets ekvation.

13. Linjen L går genom punkterna $(1,1,0)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(2,3,4)$ och är parallell med linjen L. Bestäm de båda linjernas ekvationer.

14. Linjen L går genom punkterna $(1,1,2)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(1,1,5)$ och skär linjen L under rät vinkeln. Bestäm de båda linjernas ekvationer.

15. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallell med de båda linjerna $\boldsymbol{r}(t) = (t + 1,\ 1 + 2t,\ 2t + 1)$ och $\boldsymbol{p}(t) = (2t + 3,\ 2 + t,\ t + 2)$. Bestäm planets ekvation.

16. Bestäm ekvationen för skärningslinjen mellan planen $3x + y + 2z = 1$ och $x - 2y + z = 0$.

17 Bestäm ekvationen för det plan som innehåller linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1,\ t,\ t + 1)$ och som är vinkelrät med planet $2x + 2y + z = 3$.

18. Ett plan, P, ligger på avståndet 1 från planet $2x + 3y + 6z = 7$. Bestäm P:s ekvation.

19. Beräkna avståndet mellan linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1 + 3t,\ 3 + t,\ -2t)$ och planet $x - y + z = 4$.

Svar:

1. Ja.
2. a. 1. b. -2 eller 1. c. 2.
4. $(3,6,6)$.
5. $\frac{2}{3}(2,1,2)$ och $\frac{1}{3}(5,4,-7)$.
6. a. $(-1,3,-1)$ b. $(2,-6,2)$ c. $(7,1,-4)$ d. $(-1,3,-1)$
7. a. 3. b. Ja.
8. 6.
9. $2x - y + z = 3$, $2\sqrt{6}$.
10. $x - y + 2z = 2$.
11. $x - 2y + z = 3$.
12. $x + 2y + 2z = 10$.
13. L: $(x,y,z) = (1 + t,\ 1 + t,\ t)$. K: $(x,y,z) = (2 + t,\ 3 + t,\ 4 + t)$.
14. L: $(x,y,z) = (2 - t,\ 2 - t,\ 1 + t)$. K: $(x,y,z) = (t,\ t,\ 2t + 3)$.
15. $z - y = 2$.
16. $\boldsymbol{r}(t) = (1 - 5t,\ t,\ 7t - 1)$.
17. $x - 2y + 2z = 3$.
18. $2x + 3y + 6z = 0$ eller $2x + 3y + 6z = 14$.
19. $2\sqrt{3}$.

Modul 4:
Vektorer i $\mathbb{R}^n$ och linjära avbildningar. Minsta kvadratmetod.

1. Två linjära avbildningar T och S, av typen $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ges enligt följande: $T(x,y) = (x+y,\, x-y)$ och $[S] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Bestäm matriserna för avbildningarna

$\frac{1}{2} T \cdot S$ och $\frac{1}{2} S \cdot T$ samt tolka dessa geometriskt.

2. För en linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(2,-1) = (1,3)$ och $T(-1,1) = (1,1)$. Bestäm matrisen $[T]$ för T.
Tips: Antag att $[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Lös ekvationssystemet $[T]\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $[T]\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Låt $T_{\boldsymbol{A}}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Undersök om $\boldsymbol{v} = (1,1,0)$ tillhör bilden av $\mathbf{R}^2$ (dvs undersök om det finns någon vektor $\boldsymbol{u}$ i $\mathbf{R}^2$ sådan att $T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$.

   b. Undersök om $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$ tillhör bilden av $\mathbf{R}^2$.

   c. Visa att varje punkt (x_1, x_2) avbildas på en punkt (w_1, w_2, w_3) som ligger i planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$.

   d. Visa att varje punkt i planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$ är bild av någon punkt i $\mathbf{R}^2$. (c och d tillsammans innebär att hela $\mathbf{R}^2$ avbildas på hela planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$ eller, som man säger, planet är bilden av $\mathbf{R}^2$.)

   e. Visa att $T_{\boldsymbol{A}}$ är en–entydigt (dvs visa att om $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ så är $T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}) \neq T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{v})$. Observera att det räcker att visa att $T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.)

4. En avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av

$$T(x,y,z) = (x + 2y + z,\, x^k + y + 2z,\, 2x + 3y + 3z).$$

   a. Bestäm k så att T blir en linjär avbildning.

   För detta k–värde

   b. Bestäm standardmatrisen $[T]$.

   c. Verifiera att $T(2,1,0) = (4,3,7)$.

   d. Bestäm alla vektorer $\boldsymbol{v}$, sådana att $T(\boldsymbol{v}) = (4,3,7)$.

   e. Ange, som en slutsats av resultatet i d., värdet av $\det([T])$.

f. Finns det någon vektor $\boldsymbol{v}$ sådan att $T(\boldsymbol{v}) = (3,7,4)$?

5. Låt $T_{\boldsymbol{A}}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $\boldsymbol{A}$. Undersök om $T_{\boldsymbol{A}}$ är inverterbar och om så är fallet bestäm inversen till $T_{\boldsymbol{A}}$ då

a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Undersök om vektorn $(2,1,0,-1)$ tillhör värdemängden av avbildningen $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, där $T(x,y,z) = (2x + y + z,\ x - y + 2z,\ y - z,\ x + 2y + z)$.

7. Undersök sanningshalten i följande påståenden:

För varje linjär avbildning $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och för godtyckliga vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ i $\mathbf{R}^2$ gäller att

a. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala så är också $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ ortogonala.

b. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är ortogonala så är heller inte $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ ortogo nala.

c. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är parallella så är heller inte $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ paral lella.

d. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är parallella så är också $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ parallella.

8. Låt $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara rotationen moturs med vinkel $\pi/4$. Bestäm bilden av

a. punkten $(2,4)$.

b. linjen $y = 2x$.

c. ellipsen $9x^2 + y^2 = 1$.

d. hyperbeln $9x^2 - y^2 = 1$.

e. parabeln $y = x^2$.

9. a. Visa att vektorn $\boldsymbol{u} = (1,2,3,4)$ är en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v} = (1,2,2,3)$ och $\boldsymbol{w} = (1,2,1,2)$. (Dvs. visa att det finns konstanter a och b sådana att $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$.)

b. Är vektorn $\boldsymbol{u} = (2,3,4,5)$ en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$?

10. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller ej:

a. $(1,3,2,2)$, $(1,0,-1,1)$, $(1,1,0,0)$. (Vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ är linjärt oberoende □ om likheten $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ inträffar endast för $a = b = c = 0$.)

b. $(1,3,2,-2)$, $(1,0,-1,1)$, $(1,1,0,0)$.

c. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$.

d. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,3)$.

e. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,2)$.

f. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,2), (3,4,3).

11. Undersök om vektorerna c.–f. i uppgiften 10 bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

12. För en linjär avbildning T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,1) = (3,7)$ och $T(2,1) = (4,10)$. Bestäm $T(1,2)$.

13. För en linjär avbildning T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,1) = (7,3)$ och $T(2,1) = (10,4)$. Bestäm den vektor (vektorer) $\boldsymbol{v}$ för vilken $T(\boldsymbol{v}) = (4,2)$.

14. Bestäm matrisen $[T]$ för den linjära avbildningen T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ för vilken att $T(\mathbf{e}_x) = (1,3,2)$, $T(\mathbf{e}_y) = (1,2,1)$ och $T(2,1,-1) = (2,7,4)$.

15. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = 11 \\ x - y = 0 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

16. Ange ekvationen för den räta linje $y = ax + b$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ och $(2,2)$..

Svar:

1. $\frac{1}{2}\, T\cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ är spegling m.a.p. x–axeln.

$\frac{1}{2}\, S\cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är spegling m.a.p. linjen $x = y$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. a. Ja. b. Nej.

4. a. $k = 1$. b. $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\boldsymbol{v} = (2 - 3t, t + 1, t)$. e. 0. f. Nej.

5. a. Ej inverterbar.

   b. Inverterbar och $T_{\boldsymbol{A}}^{-1}(x,y,z) = T_{\boldsymbol{A}^{-1}}(x,y,z) = (z - x, x + y - 2z, x - y + z)$.

6. Tillhör värdemängden.

7. a. Lögn! Om T är projektionen på x–axeln samt $\boldsymbol{u} = (1,1)$ och $\boldsymbol{v} = (1,-1)$, så är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ortogonala, men $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ inte.

   b. Lögn! Om T är projektionen på x–axeln samt $\boldsymbol{u} = (1,1)$ och $\boldsymbol{v} = (0,1)$, så är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte ortogonala, medan $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ är det.

   c. Lögn! Exempel i svaret till a visar att $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ kan vara parallella även om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är det.

   d. Sant! Antag att $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{u} = (x,y)$. Om $\boldsymbol{v}$ är parallell med $\boldsymbol{u}$ så är $\boldsymbol{v} = (tx,ty)$ för något tal t. Verifiera att $T(\boldsymbol{v}) = tT(\boldsymbol{u})$, dvs $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ är parallella.

8. a. $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. b. $w_2 = -3w_1$.

   c. $5w_1^2 + 8w_1w_2 + 5w_2^2 = 1$. d. $4w_1^2 + 10w_1w_2 + 4w_2^2 = 1$.

   e. $w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2 + \sqrt{2}\, w_1 - \sqrt{2}\, w_2 = 0$.

9. b. Nej.

10. a. linjärt oberoende. b. linjärt beroende.
    c. linjärt oberoende. d. linjärt beroende.
    e. linjärt oberoende. f. linjärt beroende.

11. c. bildar inte en bas. d. bildar inte en bas.
    e. bildar en bas. f. bildar inte en bas.

12. (5,11).

13. (0,1).

14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. a. $x = 4$, $y = 1$.

    b. t.ex $x = 1, y = 2, z = 0$. (Allmän minstakvadratlösning $(1 - t, 2 - t, t)$.)

16. $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{10} + \frac{\sqrt{5}}{10}$.

Modul 5: Basbyten, Egenvärden och diagonalisering, Kvadratiska former

1. Undersök vilka av följande matriser beskriver en transformation mellan två baser:

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Bestäm transformationsmatrisen för övergången från

   a. basen $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\boldsymbol{f} = \{2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2\}$ (den nya basen $\boldsymbol{f}$ består alltså av vektorerna $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ med koordinaterna (2,3) respektive (4,5) i den gamla basen $\boldsymbol{e}$).

   b. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.

   c. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, 3\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.

3. a. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (2,1). Vilka är koordina terna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$?

   b. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (3,4). Vilka är koordinaterna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$?

4. I xy–planet införs nya uv–koordinater genom att man tar vektorerna $\boldsymbol{f}_1 = (1,3)$ och $\boldsymbol{f}_2 = (2,1)$ som nya basvektorer. Vilken är ekvationen i det nya koordinatsystemet för den räta linje som i det ursprungliga systemet har ekvationen $2x + y = 5$?

5. I xy–planet införs nya uv–koordinater genom att man tar vektorerna $\boldsymbol{f}_1 = (1,2)$ och $\boldsymbol{f}_2 = (2,5)$ som nya basvektorer. En rät linje har i det nya systemet ekvationen $u + v = 1$. Vilken är linjens ekvation i det ursprungliga systemet?

6. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna (4,3) respektive (3,2) som nya basvektorer $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$.

   a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det gamla systemet har koordinaterna (2,1)?

   b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det nya systemet har koordinaterna (1,–1)?

   c. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

7. Undersök vilka av följande matriser beskriver en ON–transformation mellan två baser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. c. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

d. $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 2 & -11 & 10 \\ 14 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

8. En linjär avbildnig har i basen $\boldsymbol{e}$ matrisen $\boldsymbol{A_e}$ och i basen $\boldsymbol{f}$ matrisen $\boldsymbol{A_f}$. Bestäm

a. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

b. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

c. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

d. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

9. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $\boldsymbol{A}$ är matrisen i uppgiften 9. Undersök $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$.

12. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Om så är fallet ange en sådan bas.

13. Vilka av följande matriser är ON–diagonaliserbara?

a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.   b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Visa att matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm $\boldsymbol{A}^{10}$.

15. Undersök om $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$.

a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.   b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.   c. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

a. $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5$.

b. $4xy + 3y^2 = 1$.

c. $2y^2 + 4xy - x^2 = 1$.

17. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

a. $x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 8y = 1$.

b. $x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y = 1$.

c. $x^2 - 2xy + y^2 + 12\sqrt{2}\,x = 8$.

18. Beräkna arean innanför ellipsen $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$. Det anses känt att arean innanför ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är lika med πab.

Svar:

1. Endast matrisen i c.

2. a. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a. $(3,-1)$ b. $(7,11)$.

4. $u + v = 1$.

5. $3x - y = 1$.

6. a. $(-1,2)$ b. $(1,1)$ c. $u + v = 2$

7. Endast matriser i c och d.

8. a. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ d. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

9. a. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3,\ \boldsymbol{v}_1 = (0,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,2)$.
   b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 4,\ \boldsymbol{v} = (3,2)$.
   c. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \boldsymbol{v}_1 = (1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (0,1)$.

10. a. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,2),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,-1,0)$.
    b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0,\ \boldsymbol{v}_1 = (-1,1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,1,1)$.
    d. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ \boldsymbol{v}_1 = (-2,-3,1),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,1,0)$.

11. b men inte a.

12. Det kan man inte.

13. b men inte a.

14. $\boldsymbol{A}^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & -512 \\ 511 & 513 & -512 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. a. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    b. Ej diagonaliserbar.
    c. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

16. a. $2x^2 + y^2 = 1$, ellips.
    b. $4x^2 - y^2 = 1$, hyperbel.
    c. $3x^2 - 2y^2 = 1$, hyperbel.

17. a. $3u^2 - v^2 = 1$, hyperbel.
    b. $u^2 + 3v^2 = 10$, ellips.
    c. $v = u^2/6$, parabel.

18. $\pi/\sqrt{6}$.