KTH Matematik

Lappskrivning nr 2 i repkurs Matematik II
1 augusti 2006, kl 14.00-15.00

Version höger.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

För godkänt krävs minst 4 poäng av total 6 poäng.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din övningslärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

Skriv ditt lösningsförslag på det här bladet. Om utrymmet inte räcker, använd baksidan
Och ev skrivpapper som medföljer

1. Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x,y) = 2\sqrt{3y - x} + \dfrac{3x}{y}$ i punkten (2,1) i riktningen av vektorn (4,3).
Extra. Kan derivatan till f i punkten (2,1) i någon riktning **v** anta värdet 4.(+1p)

2. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten (1,1,0) och som innehåller linjen $(x,y,z) = (-1 + t,\ 1 + 2t,\ 1 - 2t)$.

KTH Matematik

Lappskrivning nr 2 i repkurs Matematik II
1 augusti 2006, kl 14.00–15.00

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat**.**

För godkänt krävs minst 4 poäng av total 6 poäng.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din övningslärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

Skriv ditt lösningsförslag på det här bladet. Om utrymmet inte räcker, använd baksidan
Och ev skrivpapper som medföljer.

1. Bestäm riktninsderivatan till funktionen $f(x,y) = 2\sqrt{3x - y} + \dfrac{3y}{x}$ i punkten $(1,2)$ i riktningen av vektorn $(3,4)$.
Extra: Kan derivatan till f i punkten $(1,2)$ i någon riktning $\boldsymbol{v}$ anta värdet -4? (+1p)

2. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(-1,1,1)$ och som innehåller linjen $(x,y,z) = (1 + t,\ 1 - 2t,\ t)$.

Lösningsförslag till LS1, repkurs i matematik II
Höger

1. Vi har $f(x,y) = 2\sqrt{3y-x} + \dfrac{3x}{y}$, $f'_x = \dfrac{-1}{\sqrt{3y-x}} + \dfrac{3}{y}$ och $f'_y = \dfrac{3}{\sqrt{3y-x}} - \dfrac{3x}{y^2}$. I punkten $(2,1)$ fås $f'_x(2,1) = 2$, $f'_y(2,1) = -3$ och $\text{grad}\, f(2,1) = (2,-3)$. Låt $\boldsymbol{v} = (4,3)$. Den sökta riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(2,1) = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \text{grad}\, f(2,1) = \dfrac{(4,3)}{\sqrt{4^2+3^2}} \cdot (2,-3) = -1/5$.

   För en godtycklig vektor $\boldsymbol{u}$ gäller att $-\|\text{grad}\, f(2,1)\| \le f'_{\boldsymbol{u}}(2,1) \le \|\text{grad}\, f(2,1)\|$. Här har vi $\|\text{grad}\, f(2,1)\| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13} < 4 \Rightarrow$ värdet 4 antas aldrig.

   $\boxed{\textbf{Svar: } \text{Riktningsderivatan} = -1/5. \text{ Värdet 4 antas aldrig.}}$

---

2. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(-1,1,1)$ och som innehåller linjen $(x,y,z) = (1+t, 1-2t, t)$.

Vi väljer en godtycklig punkt på linjen: T.ex för $t = 0$ får vi punkten $(1,1,0)$. Bilda vektorn $\boldsymbol{v}$ från denna punkt till punkten $(-1,1,1)$: $\boldsymbol{v} = (-2,0,1)$. Denna vektorn, samt linjens riktningsvektorn $\boldsymbol{r} = (1,-2,1)$ är parallella med planet. Kryssprodukten $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ är planets normalvektorn. Man får

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r} = \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{array} = \mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z + 2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y = (2,3,4).$$

Planets ekvation är på formen $2x + 3y + 4z = d$ och punkten $(-1,1,1)$ uppfyller ekvationen, vilket ger $d = 5$.

$\boxed{\textbf{Svar: } 2x + 3y + 4z = 5.}$

Vänster

1. Vi har $f(x,y) = 2\sqrt{3x-y} + \dfrac{3y}{x}$, $f'_x = \dfrac{3}{\sqrt{3x-y}} - \dfrac{3y}{x^2}$ och $f'_y = \dfrac{-1}{\sqrt{3x-y}} + \dfrac{3}{x}$. I punkten $(1,2)$ fås $f'_x(1,2) = -3$, $f'_y(2,1) = 2$ och $\text{grad}\, f(1,2) = (-3,2)$. Låt $\boldsymbol{v} = (3,4)$. Den sökta riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(1,2) = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \text{grad}\, f(1,2) = \dfrac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot (-3,2) = -1/5$.

   För en godtycklig vektor $\boldsymbol{u}$ gäller att $-\|\text{grad}\, f(1,2)\| \le f'_{\boldsymbol{u}}(1,2) \le \|\text{grad}\, f(1,2)\|$. Här har vi $\|\text{grad}\, f(1,2)\| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13} < 4 \Rightarrow$ värdet -4 antas aldrig.

   $\boxed{\textbf{Svar: } \text{Riktningsderivatan} = -1/5. \text{ Värdet } -4 \text{ antas aldrig.}}$

---

2. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(1,1,0)$ och som innehåller linjen $(x,y,z) = (-1+t, 1+2t, 1-2t)$.

Vi väljer en godtycklig punkt på linjen: T.ex för $t = 0$ får vi punkten $(-1,1,1)$. Bilda vektorn $\boldsymbol{v}$ från denna punkt till punkten $(1,1,0)$: $\boldsymbol{v} = (2,0,-1)$. Denna vektorn, samt linjens riktningsvektorn $\boldsymbol{r} = (1,2,-2)$ är parallella med planet. Kryssprodukten $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ är planets normalvektorn. Man får

---

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z + 2\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y = (2,3,4).$$

Planets ekvation är på formen $2x + 3y + 4z = d$ och punkten $(1,1,0)$ uppfyller ekvationen, vilket ger $d = 5$.

$\boxed{\textbf{Svar: } 2x + 3y + 4z = 5.}$