KTH Matematik

Lappskrivning nr 4 i repkurs Matematik II
1 augusti 2006, kl 14.00–15.00

Version höger.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

För godkänt krävs minst 4 poäng av total 6 poäng.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din övningslärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

Skriv ditt lösningsförslag på det här bladet. Om utrymmet inte räcker, använd baksidan
Och ev skrivpapper som medföljer

1. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen
$f(x,y) = 5x^2 - 2xy + y^2 - 2x^4$

2. Undersök om vektorerna $(1,2,1,0)$, $(1,0,0,2)$ och $(1,1,2,0)$ är linjärt oberoende.

KTH Matematik

Lappskrivning nr 4 i repkurs Matematik II
1 augusti 2006, kl 14.00–15.00

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

För godkänt krävs minst 4 poäng av total 6 poäng.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din övningslärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

Skriv ditt lösningsförslag på det här bladet. Om utrymmet inte räcker, använd baksidan
Och ev skrivpapper som medföljer

1. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen

$$f(x,y) = x^4 - 3x^2 + 2xy - y^2.$$

2. Undersök om vektorerna (1,1,0,2), (1,0,2,0) och (1,2,0,1) är linjärt oberoende.

Lösningsförslag till LS1, repkurs i matematik II
Vänster

1. f är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter.

De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f.

Kritiska punkter fås ur $\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 6x + 2y = 0 \\ f'_y = 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1 \\ y = x \qquad\qquad\qquad y = 0,\ y = 1,\ y = -1 \end{array}$

Vi har $A = f''_{xx} = 12x^2 - 6$, $B = f''_{xy} = 2$, $C = f''_{yy} = -2$ och $AC - B^2 = -24x^2 + 8$. Man får:

I $(0,0)$ är $AC - B^2 = 8 > 0$ och $A = -6 < 0 \Rightarrow$ en lokal maximipunkt.

I $(1,1)$ är $AC - B^2 = -16 < 0 \Rightarrow$ en sadelpunkt.

I $(-1,-1)$ är $AC - B^2 = -16 < 0 \Rightarrow$ en sadelpunkt.

Svar: Lokal maximum i $(0,0)$.

2.Vektorerna $(1,1,0,2)$, $(1,0,2,0)$ och $(1,2,0,1)$ är linjärt oberoende om och endast om likheten

$$a(1,1,0,2) + b(1,0,2,0) + c(1,2,0,1) = (0,0,0,0)$$

inträffar endast då $a = b = c = 0$.

Vi har $a(1,1,0,2) + b(1,0,2,0) + c(1,2,0,1) = (a + b + c,\ a + 2c,\ 2b,\ 2a + c) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2c = 0 \\ 2b = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$$

Ur den 3:e ekvationen fås $b = 0$.

Den 2:a resp den 4:e ekvationen ger $a = -2c$ resp $a = -c/2 \Leftrightarrow a = c = 0$.

Ekvationssystemet har endast en lösning $a = b = c = 0 \Leftrightarrow$ vektorerna är linjärt oberoende.

Svar: Vektorerna är linjärt oberoende.

Höger.

1. f är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter.

De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f.

Kritiska punkter fås ur $\begin{cases} f'_x = 10x - 2y - 8x^3 = 0 \\ f'_y = -2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 8x - 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1 \\ y = x \qquad\qquad\qquad y = 0,\ y = 1,\ y = -1 \end{array}$

Vi har $A = f''_{xx} = 10 - 24x^2$, $B = f''_{xy} = -2$, $C = f''_{yy} = 2$ och $AC - B^2 = 16 - 48x^2$. Man får:

I $(0,0)$ är $AC - B^2 = 16 > 0$ och $A = 10 > 0 \Rightarrow$ en lokal minimipunkt.

I $(1,1)$ är $AC - B^2 = -32 < 0 \Rightarrow$ en sadelpunkt.

I $(-1,-1)$ är $AC - B^2 = -32 < 0 \Rightarrow$ en sadelpunkt.

Svar: Lokal minimum i $(0,0)$.

2.Vektorerna $(1,2,1,0)$, $(1,0,0,2)$ och $(1,1,2,0)$ är linjärt oberoende om och endast om likheten

$$a(1,2,1,0) + b(1,0,0,2) + c(1,1,2,0) = (0,0,0,0)$$

inträffar endast då $a = b = c = 0$.

Vi har $a(1,2,1,0) + b(1,0,0,2) + c(1,1,2,0) = (a + b + c,\ 2a + c,\ a + 2c,\ 2b) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}$$

Ur den 4:e ekvationen fås $b = 0$.

Den 2:a resp den 4:e ekvationen ger $c = -2a$ resp $c = -a/2$ $\Rightarrow$ $a = c = 0$.

Ekvationssystemet har endast en lösning $a = b = c = 0$ $\Rightarrow$ vektorerna är linjärt oberoende.

$\boxed{\textbf{Svar:}\ \text{Vektorerna är linjärt oberoende.}}$