Lösningsförslag till LS5
Höger

1. Egenvärdena till $\boldsymbol{A}$ fås ur ekvationen $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Man får $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) = 0$, vilket ger $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$.

Egenvektorerna fås ur ekvationen $(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$.

För $\lambda_1 = 2$ får man $\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = -b =$ godtycklig. T.ex $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För $\lambda_1 = 3$ får man $\begin{pmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a =$ godtycklig, $b = 0$. T.ex $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Matrisen $\boldsymbol{A}$ diagonaliseras av matrisen $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ och diagonalmatrisen $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\textbf{Svar: } \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

2. 2. Det finns flera alternativ
T.ex
En punkt (x,y) på enhetscirkeln kan skrivas

$$\begin{cases} x = \cos v \\ y = \sin v \end{cases}, 0 \le v \le 2\pi$$

Denna parametrisering överför problemet på envariabelfallet. Vi får

$$f(x = \cos v, y = \sin v) = \cos^2 v + 2\sin^2 v - \cos v =$$
$$= \cos^2 v + \sin^2 v + \sin^2 v - \cos v = 1 + \sin^2 v - \cos v$$

Derivering ger

$$f'(v) = 2\sin v \cos v + \sin v$$

och derivatans nollställen är

$$2\sin v \cos v + \sin v = 0 \Leftrightarrow \sin v = 0$$
$$\text{eller } \cos v = -\frac{1}{2}$$

och rötterna i intervallet $[0,2\pi]$ är

$$\sin v = 0 \Leftrightarrow v = 0, v = \pi, v = 2\pi$$
$$\cos v = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow v = \frac{2\pi}{3}, v = \frac{4\pi}{3}$$

Det är klart att funktionens minsta värde är

$$f(0) = f(2\pi) = 0.$$

I de övriga kritiska punkterna får vi

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

och

$$f(\pi) = 2.$$

Alltså får vi att funktionens minsta värde på enhetscirkeln är 0 och det största värdet är $\frac{9}{4}$.

Vänster

1. Egenvärdena till $\boldsymbol{A}$ fås ur ekvationen $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Man får $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$, vilket ger $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3$.

Egenvektorerna fås ur ekvationen $(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$.

För $\lambda_1 = 1$ får man $\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = -b =$ godtycklig. T.ex $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För $\lambda_1 = 3$ får man $\begin{pmatrix} 1-3 & 0 \\ 2 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$, $b =$ godtycklig. T.ex $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.

Matrisen $\boldsymbol{A}$ diagonaliseras av matrisen $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och diagonalmatrisen $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\textbf{Svar: } \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

2. Sök det största och minsta värdet av

2. Det finns flera alternativ
T.ex
En punkt (x,y) på enhetscirkeln kan skrivas

$$\begin{cases} x = \cos v \\ y = \sin v \end{cases}, 0 \le v \le 2\pi$$

Denna parametrisering överför problemet på envariabelfallet. Vi får

$$f(x = \cos v, y = \sin v) = \cos^2 v + 2\sin^2 v - \cos v =$$
$$= \cos^2 v + \sin^2 v + \sin^2 v - \cos v = 1 + \sin^2 v - \cos v$$

Derivering ger

$$f'(v) = 2\sin v \cos v + \sin v$$

och derivatans nollställen är

$$2\sin v \cos v + \sin v = 0 \Leftrightarrow \sin v = 0$$
$$\text{eller } \cos v = -\frac{1}{2}$$

och rötterna i intervallet $[0,2\pi]$ är

$$\sin v = 0 \Leftrightarrow v = 0, v = \pi, v = 2\pi$$
$$\cos v = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow v = \frac{2\pi}{3}, v = \frac{4\pi}{3}$$

Det är klart att funktionens minsta värde är

$$f(0) = f(2\pi) = 0.$$

I de övriga kritiska punkterna får vi

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$

och

$$f(\pi)=2\,.$$

Alltså får vi att funktionens minsta värde på enhetscirkeln är 0 och det största värdet är $\frac{9}{4}$.