Dagens till Modul 1: må 31/7, ti 1/8

Två (en från linjäralgebra och en från flervariabelanalys) obetydligt ändrade tal kommer att väljas ur de nedanstående föreslagna talen=dagensuppgifter från Modul1

Del-Linjäralgebra: Vektorer i plan och rymden

1. Punkterna A och B delar sträckan mellan punkterna $(1,4,2)$ och $(4,1,5)$ i tre lika delar. Bestäm A och B.

2. Är punkterna $(3,7,-2)$, $(5,5,1)$, $(6,-2,2)$ och $(4,0,-1)$ hörn i en parallellogram?

3. Bestäm talet a så att
   a. vektorerna $\boldsymbol{u} = (a,2,a+2)$ och $\boldsymbol{v} = (a+1,a+3,6)$ är parallella.
   b. vektorerna $\boldsymbol{u} = (a,a,a+2)$ och $\boldsymbol{v} = (a+1,a+3,a-3)$ är ortogonala.
   c. vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,1,0)$ och $\boldsymbol{v} = (a,a-1,a)$ bildar vinkel $\pi/4$.

4. Visa att vektorerna $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ är ortogonala om och endast om vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ har samma längd.

5. Man säger att vektorn $\boldsymbol{u}$ är en *linjär kombination* av vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ om $\boldsymbol{u}$ kan skrivas på formen $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$. Undersök om vektorn $\boldsymbol{u} = (1,2,1)$ är en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v} = (-2,2,4)$ och $\boldsymbol{w} = (6,3,-3)$. (Med andra ord: undersök om det finns två stycken tal a och b sådana att $(-2,2,4) = a(-2,2,4) + b(6,3,-3)$.)

6. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(-2,2,4)$ och $(6,3,-3)$.

7. Beräkna projektionen och dess längd av
   a. $(5,3,2)$ på $(2,2,1)$.
   b. $(a,3,-3-2a)$ på $(2,-2,1)$.

8. Uppdela vektorn $(3,2,-1)$ i två vinkelräta komposanter, av vilka den ena är parallell med vektorn $(2,1,2)$.

9. Kraften $\boldsymbol{F} = (9,4,5)$ påverkar en kropp belägen i punkten $P = (2,0,0)$. Kroppen rör sig rätlinjigt mot punkten $Q = (3,2,2)$. Hur stor är kraften i vägens riktning?

10. Låt $\boldsymbol{u} = (1,1,2)$ och $\boldsymbol{v} = (2,1,1)$. Beräkna
    a. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$
    b. $\boldsymbol{v} \times 2\boldsymbol{u}$
    c. $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u}$
    d. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$

11. Beräkna trippelprodukterna $\boldsymbol{u} \bullet (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{v} \bullet (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$ och $\boldsymbol{w} \bullet (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$ då $\boldsymbol{u} = (1,1,2)$, $\boldsymbol{v} = (2,2,1)$ och $\boldsymbol{w} = (1,2,1)$.

12. a. Beräkna arean av triangeln ABC då $A = (2,2,1)$, $B = (2,3,2)$ och $C = (6,5,2)$.
    b. Ligger punkten $D = (4,5,3)$ i det plan som går genom punkterna A, B, C?
    c*. Ligger D inanför triangel ABC?

13. En parallellepiped har fyra av sina hörn i punkterna $(1,1,2)$, $(2,1,0)$, $(0,1,1)$ och $(1,2,3)$. Beräkna dess volym.

Svar

1. $(2,3,3)$ och $(3,2,4)$.

2. Ja.

3. a. 1. b. -2 eller 1. c. 2.

5. $\boldsymbol{u}$ är en linjär kombination av $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$; $a = 1/2$, $b = 1/3$.

6. $2\pi/3$.

7. a. $(4,4,2)$, 6. b. $(-2,2,-1)$, 3.

8. $\frac{2}{3}(2,1,2)$ och $\frac{1}{3}(5,4,-7)$.

9. $(3,6,6)$.

10. a. $(-1,3,-1)$ b. $(2,-6,2)$ c. $(7,1,-4)$ d. $(-1,3,-1)$

11. 3; -3; -3.

12. a. 3. b. Ja. c. Nej.

13. 6.

Del-Flervariabelanalys: Gränsvärden-kontinuitet-Partiella derivator

14. Beräkna gränsvärdet (eller visa att det inte finns):

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cos y + y^2 \cos x}{x^2 + xy + y^2}$. Tips: undersök gränsvärdet längs linjer $y = \pm x$.

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + xy + y^2}$. Tips: inför polära koordinater.

15. Kan funktionen $f(x,y) = \dfrac{y^2 - xy - 2x^2}{y - 2x}$ definieras i punkterna på linjen $y = 2x$ så att f blir kontinuerlig?

Tips: $y^2 - xy - 2x^2 = (y - ?) \cdot (y - ??)$.

16. Beräkna partiella derivator till följande funktioner:

a. $f(x,y) = \dfrac{x - y^2}{1 + xy}$

b. $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 y}$

c. $f(x,y,z) = \ln(z^2 + xy)$

17. Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

a. funktionen $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Tips: Sätt $t = y/x$. Vi har då $z = f(t)$ och $z'_x = f'(t) \cdot t'_x = f'(t) \cdot (-y/x^2)$.

b. funktionen $z = f(2x^2 + 3y^2)$ uppfyller ekvationen $3y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

c. funktionen $z = xy\,f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2\,z$.

17. Beräkna de partiella derivatorna av andra ordningen till följande funktioner:

a. $f(x,y) = xy^2 + \dfrac{y}{x}$

b. $f(x,y) = \dfrac{y}{x - 2y}$

c. $f(x,y) = \ln(1 - xy)$

d. $f(x,y) = \arctan\dfrac{1 - 2xy}{2x + y}$.

18. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan

a. $z = x \ln(5x - 2y)$ i punkten $(1,2,0)$.

b. $z = \dfrac{8x}{y} - xy + 1$ i punkten $(1,2,3)$.

Svar:

14. a. Finns inte. b. 0.

15. Funktionen f blir kontinuerlig i hela xy–planet om man i varje punkt (x,y) på linjen $y = 2x$ definierar $f(x,y) = x + y$.

16. a. $f_x = \dfrac{1 + y^3}{(1 + xy)^2}$, $f_y = -\dfrac{2y + x^2 + xy^2}{(1 + xy)^2}$

b. $f_x = \dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2y}}$, $f_y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1+x^2y}}$

c. $f_x = \dfrac{y}{z^2+xy}$, $f_y = \dfrac{x}{z^2+xy}$, $f_z = \dfrac{2z}{z^2+xy}$

17. a. $f''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}$, $f''_{yy} = 2x$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 2y - \dfrac{1}{x^2}$.

b. $f''_{xx} = \dfrac{2y}{(x-2y)^3}$, $f''_{yy} = \dfrac{4x}{(x-2y)^3}$, $f''_{xy} = \dfrac{x+2y}{(2y-x)^3}$

c. $f''_{xx} = -\dfrac{y^2}{(xy-1)^2}$, $f''_{yy} = -\dfrac{x^2}{(xy-1)^2}$, $f''_{xy} = -\dfrac{1}{(xy-1)^2}$

d. $f''_{xx} = \dfrac{16x}{(4x^2+1)^2}$, $f''_{yy} = \dfrac{2y}{(y^2+1)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$

18. a. $5x - 2y - z = 1$. b. $2x - 3y - z + 7 = 0$.

Dagens till Modul 2 : on 2/8, to 3/8

<u>Två (en från linjäralgebra och en från flervariabelanlys) obetydligt ändrade tal kommer att väljas ur de nedanstående föreslagna talen=dagensuppgifter från Modul 2</u>

<u>Linjäralgebrasdel</u>: Räta linjär och plan

1. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna $(1,1,2)$, $(2,2,1)$ och $(1,0,1)$. Beräkna också avståndet från punkten $(6,–1,2)$ till detta plan.

2. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(3,1,0)$ och linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1 – t, 1 + t, 1 + t)$.

3. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallell med planet $x – 2y + z = 1$. Bestäm planets ekvation.

4. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(2,1,3)$ och som är vinkelrätt mot linjen $\boldsymbol{r}(t) = (t + 1, 1 + 2t, 2t + 1)$.

5. Linjen L går genom punkterna $(1,1,0)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(2,3,4)$ och är parallell med linjen L. Bestäm de båda linjernas ekvationer.

6. Linjen L går genom punkterna $(1,1,2)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(1,1,5)$ och skär linjen L under rät vinkeln. Bestäm de båda linjernas ekvationer.

7. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallell med de båda linjerna $\boldsymbol{r}(t) = (t + 1, 1 + 2t, 2t + 1)$ och $\boldsymbol{p}(t) = (2t + 3, 2 + t, t + 2)$. Bestäm planets ekvation.

8. Bestäm ekvationen för skärningslinjen mellan planen $3x + y + 2z = 1$ och $x – 2y + z = 0$.

9. Planet P går genom punkten $(3,2,1)$ och är parallell med de båda linjerna $\boldsymbol{p}(t) = (t, 2t + 1, 1 + t)$ och $\boldsymbol{r}(t) = (2t + 1, 1 + t, 2t + 2)$. Bestäm planets ekvation. Beräkna också avståndet mellan planet och den första linjen.

10. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1, t, t + 1)$ och som är vinkelrät med planet $2x + 2y + z = 3$.

11. Punkterna A och B är symmetriska med avseende på planet $2x + y + z = 11$. Bestäm B då $A = (1,2,1)$.

12. Ett plan, P, ligger på avståndet 1 från planet $2x + 3y + 6z = 7$. Bestäm P:s ekvation.

13. Punkterna A och B är symmetriska med avseende på linjen $x = 3 + t$, $y = 2 – t$, $z = 2 + t$. Bestäm B då $A = (2,0,1)$.

14. Beräkna avståndet mellan linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1 + 3t, 3 + t, –2t)$ och planet $x – y + z = 4$.

15. Ett plan går genom punkten $(1,2,3)$ och är vinkelrät med skärningslinjen mellan planen $x + y + 2z = 9$ och $2x + 3y + z = 11$. Bestäm planets ekvation.

Svar:

1. $2x - y + z = 3,\ 2\sqrt{6}$.
2. $x - y + 2z = 2$.
3. $x - 2y + z = 3$.
4. $x + 2y + 2z = 10$.
5. L: $(x,y,z) = (1 + t, 1 + t, t)$. K: $(x,y,z) = (2 + t, 3 + t, 4 + t)$.

---

6. L: $(x,y,z) = (2 - t, 2 - t, 1 + t)$. K: $(x,y,z) = (t, t, 2t + 3)$.
7. $z - y = 2$.
8. $\boldsymbol{r}(t) = (1 - 5t, t, 7t - 1)$.
9. $x - z = 2,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
10. $x - 2y + 2z = 3$.
11. $(5,4,3)$.
12. $2x + 3y + 6z = 0$ eller $2x + 3y + 6z = 17$.
13. $(4,4,3)$.
14. $2\sqrt{3}$.
15. $5x - 3y - z + 4 = 0$.

Flervariabelanalysdel: Högre derivator-koordinattransformationer.

1. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen

$$x = 2u + 3v,\ \ y = 4u - 6v$$

får vi en ny funktion $z = f(2u + 3v, 4u - 6v)$ av variabler u och v.
Bestäm $3\,z'_u - 2\,z'_v$.

Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 2 f'_x + 4 f'_y$.

2. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen

$$x = 2u + 3v,\ \ y = \frac{u}{v}$$

får vi en ny funktion $z = f\left(2u + 3v, \frac{u}{v}\right)$ av variabler u och v.

Bestäm $u\,z'_u + v\,z'_v$.

Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 2 f'_x + \frac{1}{v}\ f'_y$.

3. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan

a. $x^3 + 2y^3 + 3z^3 + xyz = 7$ i punkten $(2,-1,1)$.

b. $xy^3 + \frac{9y}{z} - x^3z^2 = 5$ i punkten $(1,2,3)$.

c. $\frac{z}{x - y^2} + \ln(z - xy) = 3$ i punkten $(2,1,3)$.

4. Beräkna den vinkel som tangenplanet till ytan $2x^3 - x^2y - y^3 - 2z + z^3 = 8$ i punkten $(1,-1,2)$ bildar med xy–planet. Bestäm även tangentplanets ekvation.

5. I vilken punkt är planet $2x + y - 3z = 8$ tangentplan till ellipsoiden

$x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$?

6. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna

$x^2yz = 1$ och $x^3y + y^3z + z^3x = 3$ i punkten $(1,1,1)$.

7. Beräkna riktningsderivatan till funktionen $f(x,y) = \frac{y}{x} + xy^2$ i punkten $(1,2)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (3,4)$.

8. Beräkna den mot vektorn $\boldsymbol{v} = (0,-3,4)$ svarande riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = x\arctan\frac{y}{z}$ i punkten $(5,2,-1)$.

9. I vilken riktning bör punkten (x,y) röra sig utgående från $(1,2)$ för att värdet av $xy - 5\ln(x + y^2)$ skall växa så snabbt som möjligt?

10. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = uv,\ y = \frac{u}{v}$ får vi en ny funktion $z = f\left(uv, \frac{u}{v}\right)$ av variabler u och v. Bestäm $u\,z'_u + v\,z'_v$.

Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = v f'_x + \frac{1}{v} f'_y$.

Svar:

Svar:

1. $24 f'_y$.
2. $x f'_x$
3. a. $11x + 8y + 7z = 21$. b. $19x - 15y + 8z = 13$.
   c. $2x - 2y - z + 1 = 0$.
4. $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$, $4x - 2y + 5z = 16$.
5. $(2,1,-1)$.
6. $\boldsymbol{r}(t) = (1, 1 + t, 1 - t)$.
7. 26.
8. -1.
9. $(1,-3)$.

Dagens till Modul3 : fr 4/8, må 7/8

Två (en från linjäralgebra och en från flervariabelanalys) obetydligt ändrade tal kommer att väljas ur de nedanstående föreslagna talen=dagensuppgifter från Modul3

Flervariabelanalysdel: kedjeregeln vid variabelbyte.Jacobimatriser/determinanter. Implicitafunktionsatsen. Taylorsutvecklingar

I uppgifterna 1–5 förutsätter vi att funktionen f har kontinuerliga derivator av första och andra ordningen.

1. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v) = f(x,y)$ där $x = u + v$ och $y = uv$. Verifiera att
   a. $u z'_u + v z'_v = x f'_x + 2y f'_y$.
   b. $z''_{uv} = f''_{xx} + y f''_{yy} + x f''_{xy} + f'_y$.

2. Bestäm z''_{uv} då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = uv$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

3. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = u - v$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

4. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = u^2 - v^2$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

5. En funktion $z(x,y)$ uppfyller ekvationen $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$. Hur förändras denna ekvation om man ersätter funktionen z med funktionen f enligt

   $z = f(u,v)$, $u = x - y$, $v = x + y$?

6. Visa att ekvationen $x \ln(1 + y^2) + \sin(xy + 1) = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(0,0)$ precis en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(0) = 0$.

7. Visa att det i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 2$ och sådan att $z(1,1) = 1$. Bestäm för denna funktion:
   a. $z'_x(1,1)$ och $z'_y(1,1)$
   b. $\operatorname{grad} z(1,1)$
   c. riktningsderivatan i punkten $(1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (2,-6)$.

8. Visa att funktionen $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{cases} u = 2x + \sin y \\ v = \sin x + y + 1 \end{cases}$ är lokalt inverterbar. Beräkna, i punkten $(u,v) = (0,1)$, de partiella derivatorna $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ samt inversens Jacobimatris.

9. Visa at ekvationssystemet $\begin{cases} xy^2 + yz^2 + zx^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$ definierar i en omgivning av punkten $(0,1,2)$ precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$ och

   $z = z(x)$ sådana att $y(0) = 1$ och $z(0) = 2$.

10. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till följande funktioner:
    a. $f(x,y) = 2 \ln(x - 2y) + e^{2x - 6y}$ kring punkten $(3,1)$.
    b. $f(x,y) = e^{x - 1} \cos(x - y)$ kring punkten $(1,1)$.

Svar:

Svar:

2. $4yf''_{xx} + yf''_{yy} + 2xf''_{xy} + f'_y$.

3. $4xf''_{xx} + 2f''_{yy} + 4yf''_{xy} + 4f'_x$.

4. $4xf''_{xx} + 4xf''_{yy} + 8yf''_{xy} + 4f'_x$.

5. $f''_{uv} = 0$ (man kan förkorta med 4).

6. a. $z'_x(1,1) = -5/2,\ z'_y(1,1) = -1$.

   b. grad $z(1,1) = (-5/2, -1)$.

   c. 1.

7. $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 1,\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = 2,\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

10. a. $-1 + 4x - 10y + (x-3)^2 - 8(x-3)(y-1) + 14(y-1)^2$

    b. $x + (x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2$.

    b. $x + (x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2$.

Linjäralgebrasdel: linjära ekvationssystem. Matriser. determinanter

1. Lös följande ekvationssystem simultant:

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 4x + 2y + z = 9 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x + 2y + z = 12 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y + z = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$.

2. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

skall ha någon lösning?

3. För vilka värden på konstanter a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 6y = 6 \\ x + by = 2 \end{cases}$$

precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

Ledning: Tolka ekvationsystemet geometriskt. Varje ekvation beskriver då en rät linje i planet.

4. För vilka värden på konstanter a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -8 \\ x + z = 2 \\ 3x + 3y + az = b \end{cases}$$

precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

5. Lös för alla a–värden ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}.$$

6. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A}X = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inversen till matrisen

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ledning. För att visa att $\boldsymbol{A}$ är inversen till $\boldsymbol{B}$ räcker det att visa att $\boldsymbol{AB} = \mathrm{I}$.

8. Bestäm inverser till följande matriser

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.   b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. För vilka värden på konstanter a och b är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en invers till matrisen $\begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$?

10. Bestäm inverser till matriser $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ och $\boldsymbol{A}^2$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Bestäm inversen till matrisen $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - 3\boldsymbol{B})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A}X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ då

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. Multiplicera ledvis, från vänster med $\boldsymbol{A}^{-1}$. I vänsterledet får man $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}X = X$. Lösningen fås ur $X = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot$ den givna matrisen.

13. För vilka reella a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverterbar?

14. Bestäm $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tips: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1}$.

15. Bestäm matrisen $\boldsymbol{A}$ då $(2\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

Ledning:Transponera ledvis.

16. Beräkna följande determinanter:

a. $\begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ a & a+2 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

17. För vilka reella a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverterbar?

18. Beräkna $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ och $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

19. Bestäm för varje a–värde antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Svar:

1. a. $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$ och $x = 2,\ y = 1,\ z = 2$

   b. $x = 1 - t,\ y = t - 1,\ z = t$ och ingen lösning.

   c. ingen lösning och $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

2. $a = 3$.

3. $ab \neq 6$ en lösning $a = 3$ och $b = 2$ ger oädligt många lösningar

   $ab = 6$ och $a \neq 3$ ger ingen lösning.

4. Precis en lösning om $a \neq 6$.

   Oändligt många lösningar om$a = 6$ och $b = 0$.
   Ingen lösning då $a = 6$ och $b \neq 0$.

5. $a = -1$ ger olösbart, $a \neq -1$ger $x = \dfrac{-20}{7(a+1)}$, $y = \dfrac{11}{7}$, $z = \dfrac{5a - 15}{7(a+1)}$.

6. $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

8. a. $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $a = 2$ och $b = 0$.

10. $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

    $(\boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 4 \\ -14 & 11 & -5 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{pmatrix}$.

13. a. $a \neq 4$.

14. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

15. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/5 \\ 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$.

16. a. 2. b. 9. c. 1.

17. $a \neq 4$.

18. 0 resp 29.

19. $a \neq -1$ och $a \neq 3$ ger en lösning, $a = -1$ ger ingen lösning,
$a = 3$ ger oändligt många lösningar.

Dagens till Modul4 : Ti 8/8, On 9/8

Två (en från linjäralgebra och en från flervariabelanalys) obetydligt ändrade tal kommer att väljas ur de nedanstående föreslagna talen=dagensuppgifter från Modul4

FlervariabelAnalysdel: Lokala undersökningar: loakala min/max, sadelpunkter

1. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
   a. $f(x,y) = 2xy^2 + x^2 + 4y$
   b. $f(x,y) = 2x + y + 3\sqrt{1 + x^2 + y^2}$
   c. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   d. $f(x,y) = 3x^3 - 9x + 3y - y^3$
   e. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$

2. Är det sant att $4x^2 + 3y^2 + 2\cos(x + y) \geq 2$ om (x,y) ligger tillräckligt nära origo?

3. Verifiera att funktionen $f(x,y) = (1 + y)^3 x^2 + y^2$ endast har en kritisk punkt och att f antar i denna ett lokalt minimivärde. Är detta värde funktionens minsta värde?

4. Bestäm eventuella lokala extremvärden till följande funktioner:
   a. $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - y^2$.
   b. $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + x + \dfrac{1}{y}$.

5. För vilka värden på konstanten a har funktionen

   $f(x,y) = a(x + a)^2 + y^2 - 2y - \cos(x - y)$ ett lokalt extremvärde i punkten $(1,1)$. Bestäm även punktens karaktär för dessa a.

6. Är det sant att $2x + (x - y)^2 + \ln(2 - x^2) \geq 2$ om (x,y) ligger tillräckligt nära punkten $(1,1)$?

Svar:

1. a. Det finns inga lokala extrempunkter. Det finns en sadelpunkt $(-1,1)$.
   b. Lokalt minimum i $(-1,-1/2)$.
   c. Lokalt minimum i $(1,1)$. (sadel i $(0,0)$.)
   d. Lokalt min i $(1,-1)$, lokalt maximum i $(-1,1)$. (sadel i $(1,1)$ och $(-1,-1)$.)
   e. Lokalt minimum i $(2/3,-2/3)$, lokalt maximum i $(-1,1)$. (sadel i $(0,0)$.)
2. Ja.
3. Lokal minimum i $(0,0)$. $f(0,0)$ är inte funktionens minsta värde då t.ex $f(0,0) > f(3,-2)$. (Jämför detta med funktioner av en variabel: Om $f(x)$ endast har en kritisk punkt och om f antar i denna ett lokalt minimivärde så är detta värde funktionens minsta värde.)
4. a. Lok. max. 0 i $(0,0)$. b. Lok. min. 3 i $(1,1)$.
   5. Endast för $a = 0$. För $a = 0$ är $(1,1)$ en lokal minimipunkt.
6. Nej.

Linjäralgebrasdel: Linjära kombinationer,beroende och oberoende,baser. Vektors koordinater i olika system.Transformationsmatriser

1. a. Visa att vektorn $\boldsymbol{u} = (1,2,3,4)$ är en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v} = (1,2,2,3)$ och $\boldsymbol{w} = (1,2,1,2)$. (Dvs. visa att det finns konstanter a och b sådana att $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$.)
   b. Är vektorn $\boldsymbol{u} = (2,3,4,5)$ en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$?

2. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller ej:
   a. (1,3,2,2), (1,0,–1,1), (1,1,0,0). (Vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ är linjärt oberoende □ om likheten $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ inträffar endast för $a = b = c = 0$.)
   b. (1,3,2,–2), (1,0,–1,1), (1,1,0,0).
   c. (1,3,2), (2,1,1).
   d. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,3).
   e. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,2).
   f. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,2), (3,4,3).

3. Undersök om vektorerna c.–f. i uppgiften 2 bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

4. Bestäm transformationsmatrisen för övergången från
   a. basen $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\boldsymbol{f} = \{2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2\}$ (den nya basen $\boldsymbol{f}$ består alltså av vektorerna $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ med koordinaterna (2,3) respektive (4,5) i den gamla basen $\boldsymbol{e}$).
   b. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.
   c. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, 3\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.

5. a. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (2,1). Vilka är koordinaterna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$?
   b. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (3,4). Vilka är koordinaterna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$?

6. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna (4,3) respektive (3,2) som nya basvektorer $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$.
   a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det gamla systemet har koordinaterna (2,1)?
   b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det nya systemet har koordinaterna (1,–1)?
   c. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

7. Undersök vilka av följande matriser beskriver en transformation mellan två baser:

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. I xy–planet införs nya uv–koordinater genom att man tar vektorerna

   $\boldsymbol{f}_1=(1,3)$ och $\boldsymbol{f}_2 = (2,1)$ som nya basvektorer. Vilken är ekvationen i det nya koordinatsystemet för den räta linje som i det ursprungliga systemet har ekvationen $2x + y = 5$?

9. I xy–planet införs nya uv–koordinater genom att man tar vektorerna $\boldsymbol{f}_1 = (1,2)$ och $\boldsymbol{f}_2 = (2,5)$ som nya basvektorer. En rät linje har i det nya systemet ekvationen $u + v = 1$. Vilken är linjens ekvation i det ursprungliga systemet?

10. Undersök vilka av följande matriser beskriver en ON–transformation mellan två baser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. c. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

d. $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 2 & -11 & 10 \\ 14 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

<u>Svar:</u>

1. b. Nej.
2. a. linjärt oberoende. b. linjärt beroende.
   c. linjärt oberoende. d. linjärt beroende.
   e. linjärt oberoende. f. linjärt beroende.
3. c. bildar inte en bas. d. bildar inte en bas.
   e. bildar en bas. f. bildar inte en bas.
4. a. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. a. $(3,-1)$ b. $(7,11)$.
6. a. $(-1,2)$ b. $(1,1)$ c. $u + v = 2$
7. Endast matrisen i c.
8. $u + v = 1$.
9. $3x - y = 1$.
10. Endast matriser i c och d.

Dagens till Modul 5: : to 10/8, fr 11/8

Två (en från linjäralgebra och en från flervariabelanalys) obetydligt ändrade tal kommer att väljas ur de nedanstående föreslagna talen=dagensuppgifter från Modul 5

FlervariabelAnalys : Optimering på kompakta och icke kompakta mängder, optimering med bivillkor, Taylors utvecklingar

1. Bestäm det största och det minsta värde funktionen $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2y$ kan anta på cirkeln $x^2 + y^2 = 4$.

2. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy - 2x - 4y$ på och inom triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (2,0) och (0,2).

3. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4y$ då

   $y \geq 1$ och $x^2 + y^2 \leq 9$.

4. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$ då $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

5. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y) = y^3 - x^2y$ då $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x + y \leq 1$.

6. Kan produkten av tre positiva tal vara 19 om deras summa är 8?

7. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y) = x^2y + 2y^2 - 4xy$ då definitionsmängden ges av $0 \leq x \leq 4$ och $0 \leq y \leq x^2$.

8. Bestäm lokala extrempunter till funktionen $f(x,y) = xy(3 - x - y)$.

9. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

10. Bestäm det största och det minsta värdet funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$ kan anta då $\frac{x^2}{2} \leq y \leq 2$.

Svar:

Svar:

1. 9 och 0.
2. 0 och $-16/7$.
3. 11 och 3.
4. 4 och 1.
5. 1 och $-1/8$.
6. Aldrig i livet!
7. Intervallet $[-2, 512]$.
8. Lokalt maximum i (1,1). (Det finns tre sadelpunkter: (0,0), (3,0), (0,3).)
9. 14 och -14.
10. 5 och 0.

<u>Linjäralgebrasdel</u>:<u>Byte av koordinatsystem:Linjära avbildningars matriser i olika system,Diagonaliseringsproblemet,Kurvor i planet</u>

11. En linjär avbildnig har i basen $\boldsymbol{e}$ matrisen $\boldsymbol{A_e}$ och i basen $\boldsymbol{f}$ matrisen $\boldsymbol{A_f}$. Bestäm

a. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

b. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

c. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

d. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

12. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Undersök om $\boldsymbol{v}$ är en egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, och ange då motsvarande egenvärde, om

a. $\boldsymbol{v} = (1,1,1,1)$.

b. $\boldsymbol{v} = (1,-1,1,1)$.

15. Undersök om matrisen $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$.

a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Undersök om matrisen $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$.

a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. c. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Om så är fallet ange en sådan bas.

18. Vilka av följande matriser är ON–diagonaliserbara?

a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

19. Visa att matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm $\boldsymbol{A}^{10}$.

20. Matrisen A har egenvärden 2, 3 och 4 med motsvarande egenvektorer (1,3,1), (1,1,0) resp. (1,2,1). Bestäm A.

21. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

a. $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5$.

b. $4xy + 3y^2 = 1$.

c. $2y^2 + 4xy - x^2 = 1$.

22. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

a. $x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 8y = 1$.

b. $x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y = 1$.

c. $x^2 - 2xy + y^2 + 12\sqrt{2}\,x = 8$.

23. Beräkna arean innanför ellipsen $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$. Det anses känt att arean innanför ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är lika med πab.

24. Vilken är den geometriska innebörden av följande ekvationer i $\mathbf{R}^3$?

a. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$.

b. $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz = 1$.

c. $x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xy + 2xz = 1$.

Svar:

11. a. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

d. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

12. a. $l_1 = -1,\ l_2 = 3,\ \boldsymbol{v}_1 = (0,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,2).$

b. $l_1 = l_2 = 4,\ \boldsymbol{v} = (3,2).$

c. $l_1 = l_2 = 0,\ \boldsymbol{v}_1 = (1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (0,1).$

13. a. $l_1 = 0,\ l_2 = 1,\ l_3 = 2,\ \boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,2),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,-1,0).$

b. $l_1 = l_2 = 1,\ l_3 = 0,\ \boldsymbol{v}_1 = (-1,1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,1,1).$

d. $l_1 = l_2 = 0,\ l_3 = 1,\ \boldsymbol{v}_1 = (-2,-3,1),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,1,0)$

14. a. Egenvektor. Egenvärde 5. b. Ej egenvektor.

15. a. Diagonaliserbar. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b. Ej diagonaliserbar.

c. Diagonaliserbar. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

16. a. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b. Ej diagonaliserbar.

c. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

17. Det kan man inte.

18. b men inte a.

19. $\boldsymbol{A}^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & -512 \\ 511 & 513 & -512 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$

21. a. $2x^2 + y^2 = 1$, ellips.

b. $4x^2 - y^2 = 1$, hyperbel.

c. $3x^2 - 2y^2 = 1$, hyperbel.

22. a. $3u^2 - v^2 = 1$, hyperbel.

b. $u^2 + 3v^2 = 10$, ellips.

c. $v = u^2/6$, parabel.

23. $\pi/\sqrt{6}$.

24. a. Ellipsoid.

b. Enmantlad hyperboloid.

c. Tvåmantlad hyperboloid.