KTH Matematik

Kompletteringsskrivning till repetitionskursen Amelia I, 2007–08–11, kl 10.00–11.00.

Gäller kurserna 5B1122, 5B1130, 5B1132, 5B1140, 5B1142, 5B1143/2.

OBS! Denna skrivning får bara skrivas av dem som under repetitionskursens gång har klarat exakt tre lappskrivningar.
Den som missade lappskrivning n (n = 1, 2, ... , 5) skall göra uppgift n.
Godkänd lappskrivning n (n = 1, 2, ... , 5) innebär att uppgift n är godkänd och inte skall lösas.
Man kan få högst betyg 3 (3E). För betyg 3 (3E) krävs att alla uppgifter är godkända samt godkänd närvaro på kursen.
Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

1. Beräkna determinanten $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1})$ där
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Ett plan innehåller linjerna $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t, 1 - 2t, 1 + t)$ och $\boldsymbol{p}(s) = (4s, 3 - 6s, s)$. Bestäm en ekvation för deta plan.

3. Bestäm en ekvation för tangenten och normalen till kurvan
$$\ln(1 + x - 3y) + y\sqrt{x + y} = 2$$
i punkten (3,1).

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$$y'' - 4y' + 13y = e^{4x}.$$

5. Beräkna integralen
$$\int_4^7 \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 3}\,dx.$$

Lycka till!

Ett lösningsförslag kommer att finnas på kursens hemsida.
De rättade skrivningarna kan så småningom hämtas på studentexpeditionen. Meddelande om detta kommer att finnas på kursens hemsida.

1. Man får

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } \det(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1}) = 3 \neq 0.$$

Svar: 3.

2. Linjernas riktingsvektorer $\boldsymbol{u} = (1,-2,1)$ och $\boldsymbol{v} = (4,-6,1)$ är parallella med planet. Detta medför att vektorn $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (4,3,2)$ är planets normalvektor. För $t = 0$ får vi punkten $(1,1,1)$. Planet ges av ekvationen

$$(4,3,2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$$

dvs $4x + 3y + 2z = 9$.

Svar: $4x + 3y + 2z = 9$.

3. Implicit derivering av $\ln(1 + x - 3y) + y\sqrt{x + y} = 2$ med avseende på x ger

$$\frac{1 - 3y'}{1 + x - 3y} + y'\sqrt{x + y} + \frac{y(1 + y')}{2\sqrt{x + y}} = 2$$

För $x = 3$, $y = 1$ får man $\dfrac{1 - 3y'}{1} + 2y' + \dfrac{1 + y'}{4} = 0$ dvs $y'(3) = \dfrac{5}{3}$.

Tangenten i punkten $(3,1)$ ges av $\dfrac{y - 1}{x - 3} = y'(3) \Leftrightarrow 5x - 3y = 12$.

Normalen i punkten $(3,1)$ ges av $\dfrac{y - 1}{x - 3} = -\dfrac{1}{y'(3)} \Leftrightarrow 3x + 5y = 14$.

Svar: Tangenten ges av $5x - 3y = 12$. Normalen ges av $3x + 5y = 14$.

4. Karakteristisk ekvation är här $r^2 - 4r + 13 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)^2 = -9 \Leftrightarrow r = 2 \pm 3\mathrm{i}$. Följaktligen är $y_h = (A \cos 3x + B \sin 3x)\mathrm{e}^{2x}$ den allmänna lösningen till ekvationen $y'' - 4y' + 13y = 0$. Betrakta ekvationen $y'' - 4y' + 13y = \mathrm{e}^{4x}$. Ansats $y = a\,\mathrm{e}^{4x}$ ger $y' = 4a\,\mathrm{e}^{4x}$, $y'' = 16a\,\mathrm{e}^{4x}$ vilket, insatt i ekvationen, ger $16a\mathrm{e}^{4x} - 16a\,\mathrm{e}^{4x} + 13a\,\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{4x} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{13}$, alltså $y_p = \dfrac{1}{13}\,\mathrm{e}^{4x}$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$ dvs $y = (A \cos 3x + B \sin 3x)\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{13}\,\mathrm{e}^{4x}$.

Svar: $y = (A \cos 3x + B \sin 3x)\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{13}\,\mathrm{e}^{4x}$.

5. Vi har

$$\frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3x - 7}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3}$$

”Handpåläggning” ger $A = 2$ och $B = 1$.

$$\int_4^7 \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x = \int_4^7 \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x - 3}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \Big[2 \ln(x - 1) + \ln(x - 3)\Big]_4^7 = 2 \ln 6 + \ln 4 - 2 \ln 3 - \ln 1 = 4 \ln 2.$$

Svar allmänt: 4 ln 2.