1. Lös ekvationssystemet:

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ 4x + y + 2z = 9 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 7x + 3y + 2z = 2 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$.

2. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

skall ha någon lösning?

3. Lös följande ekvationssystem simultant:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 4x + 2y + z = 9 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x + 2y + z = 12 \end{cases}.$$

4. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ x - 4y - 5z = c \end{cases}$$

är lösbart om och endast om $c = 13a - 6b$. Lös ekvationssystemet i detta fall.

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = -14 \end{cases}$$

6. För vilka värden på konstanter a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -8 \\ x + z = 2 \\ 3x + 3y + az = b \end{cases}$$

precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

<u>Svar:</u>

1. a. $(x,y,z) = (1,1,2)$. b. Ingen lösning.
2. $a = 3$.
3. $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$ och $x = 2,\ y = 1,\ z = 2$
4. $x = 5a - 2b + t,\ y = b - 2a - t,\ z = t$.
5. $x = 5 - t,\ y = t,\ z = -8$.
6. Precis en lösning $\Leftrightarrow a \neq 6$.
   Oändligt många lösningar $\Leftrightarrow a = 6$ och $b = 0$.
   Ingen lösning $\Leftrightarrow a = 6$ och $b \neq 0$.

7. Lös för alla a–värden ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + \ \ y + 2z = 3 \\ ax + 2y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + 3y - \ \ z = 4 \end{cases}.$$

8. Bestäm matrisen $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - 2\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Bestäm a, b och c så att $\begin{pmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ b & b & 2b \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Bestäm inverser till följande matriser

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Bestäm inverser till matriser $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ och $\boldsymbol{A}^2$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Svar:</u>

7. $a = -1 \Rightarrow$ olösbart, $a \neq -1 \Rightarrow x = \dfrac{-20}{7(a+1)}$, $y = \dfrac{11}{7}$, $z = \dfrac{5a - 15}{7(a+1)}$.

8. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $a = 0,\ b = 1,\ c = 0.$

10. $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

11. a. $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 4 \\ -14 & 11 & -5 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

13. Bestäm matrisen $\boldsymbol{A}$ då $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

14. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A}X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. Multiplicera ledvis, från vänster med $\boldsymbol{A}^{-1}$. I vänsterledet får man $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}X = X$. Lösningen fås ur $X = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot$ den givna matrisen.

15. Beräkna följande determinanter:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

16. För vilka värden på konstanten k är matrisen $\boldsymbol{A}$ inverterbar?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & k & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

17. Beräkna $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ och $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Bestäm för varje a–värde antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Svar:

13. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

14. $X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{pmatrix}$.

15. a. -2. b. 0. c. 0.

16. $k \neq 4$.

17. 0 resp 29.

18 $a \neq -1$ och $a \neq 3 \Rightarrow$ en lösning, $a = -1 \Rightarrow$ ingen lösning, $a = 3 \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

19. Punkterna A och B delar sträckan mellan punkterna $(1,4,2)$ och $(4,1,5)$ i tre lika delar. Bestäm A och B.

20. Bestäm talet a så att
    a. vektorerna $\boldsymbol{u} = (a,2,a+2)$ och $\boldsymbol{v} = (a+1,a+3,6)$ är parallella.
    b. vektorerna $\boldsymbol{u} = (a,a,a+2)$ och $\boldsymbol{v} = (a+1,a+3,a-3)$ är ortogonala.
    c. vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,1,0)$ och $\boldsymbol{v} = (a,a-1,a)$ bildar vinkel $\pi/4$.

21. Bestäm projektionen och dess längd av vektorn $(5,3,2)$ på vektorn $(2,2,1)$.

22. Uppdela vektorn $(3,2,-1)$ i två vinkelräta komposanter, av vilka den ena är parallell med vektorn $(2,1,2)$.

23. Bestäm de båda enhetsvektorer som är ortogonala mot vektorerna $(2,-6,-3)$ och $(4,3,-1)$.

24. Låt $\boldsymbol{u} = (1,1,2)$ och $\boldsymbol{v} = (2,1,1)$. Beräkna
    a. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ b. $\boldsymbol{v} \times 2\boldsymbol{u}$

25. Beräkna trippelprodukterna $\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$ och $\boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$ då $\boldsymbol{u} = (1,1,2)$, $\boldsymbol{v} = (2,2,1)$ och $\boldsymbol{w} = (1,2,1)$.

26. Beräkna arean av triangeln ABC då $A = (2,2,1)$, $B = (2,3,2)$ och $C = (6,5,2)$.

27. En parallellepiped har fyra av sina hörn i punkterna $(1,1,2)$, $(2,1,0)$, $(0,1,1)$ och $(1,2,3)$. Beräkna dess volym.

28. En parallellogram har hörnpunkterna $(1,3,2)$, $(2,-1,1)$, $(-1,2,3)$ och $(0,-2,2)$. Sök parallellogrammens area.

<u>Svar:</u>

19. $(2,3,3)$ och $(3,2,4)$.
20. a. 1. b. -2 eller 1. c. 2.
21. $(4,4,2)$; 6.
22. $\frac{2}{3}(2,1,2)$ och $\frac{1}{3}(5,4,-7)$.
23. $\pm\frac{1}{7}(3,-2,6)$.
24. a. $(-1,3,-1)$ b. $(2,-6,2)$
25. $3; -3; -3$.
26. 3.
27. 3.
28. $\sqrt{107}$.

29. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z + 2v = 2 \\ 2x + 3y + 2z + v = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 3v = 3 \\ 4x + y + z + 3v = 4 \end{cases}.$$

30. Bestäm konstanterna a, b och c så att ekvationssytemet

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ 2bx + 2ay + cz = 4 \\ cx + by + 3az = 0 \end{cases}$$

får lösningen $x = 1,\ y = 1$ och $z = -1$.

31. Lös följande ekvationssystem simultant:

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y + z = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2 \end{cases}.$

b. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}.$

32 Lös ekvationssystemet

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 3x + y + z = 12 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

33. Lös följande ekvationssystem simultant:

$$\begin{cases} 2x + z + 2w = 1 \\ 3x + 2y + 2z + w = 2 \\ 4x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + z + 2w = 0 \\ 3x + 2y + 2z + w = 0 \\ 4x + 4y + 3z = 0 \end{cases}.$$

<u>Svar:</u>

29. $(x,y,z,v) = (1,-1,1,0)$.

30. $a = 2,\ b = 2,\ c = 4$.

31. a. $x = 1 - t,\ y = t - 1,\ z = t$ och ingen lösning.

    b. ingen lösning och $x = 0,\ y = 0$.

32. a. $x = 3,\ y = 2,\ z = 1$. b. Ingen lösning.

33. ingen lösning och $x = 2s - 3t,\ y = s,\ z = 4t - 4s,\ w = t$.

34. För vilka värden på konstanter a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 6y = 6 \\ x + by = 2 \end{cases}$$

precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

Ledning: Tolka ekvationsystemet geometriskt. Varje ekvation beskriver då en rät linje i planet.

35. Bestäm matrisen $(3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

36. Bestäm matrisen $\boldsymbol{A}$ så att $\left(\boldsymbol{A} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

37. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Tips: Transponera ledvis någon ekvation.

38. Bestäm alla 2×2–matriser $\boldsymbol{A}$ sådana att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

39. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. För att visa att $\boldsymbol{A}$ är inversen till $\boldsymbol{B}$ räcker det att visa att $\boldsymbol{AB} = \mathrm{I}$.

Svar:

34. $ab \neq 6 \Rightarrow$ en; $a = 3$ och $b = 2 \Rightarrow$ oädligt många; $ab = 6$ och $a \neq 3 \Rightarrow$ ingen.

35. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

36. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

37. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

38. Alla matriser på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

40. För vilka värden på konstanter a och b är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en invers till matrisen $\begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$?

41. Bestäm inversen till matrisen $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - 3\boldsymbol{B})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

42. Bestäm $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tips: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{BA})^{-1}$.

43. Bestäm matrisen $\boldsymbol{A}$ då $(2\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$. Ledning:Transponera ledvis.

45. Beräkna följande determinanter:

a. $\begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ a & a+2 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

46. För vilka värden på konstanten k är matrisen $\boldsymbol{A}$ inverterbar?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Svar:</u>

40. $a = 2$ och $b = 0$.

41. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

42. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

43. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/5 \\ 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$.

45. a. 2. b. 9. c. 1.

46. $k \neq -7$.

47. Verifiera att matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

    Beräkna $\det(\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-2})$.

48. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3x + y + z + av = 1 \\ x + ay + z + 2v = 2 \\ ax + y + z + 2v = 3 \\ x + y + z + av = 4 \end{cases}$$
    skall ha precis en lösning?

49. Är punkterna $(3,7,-2)$, $(5,5,1)$, $(6,-2,2)$ och $(4,0,-1)$ hörn i en parallellogram?

50. Bestäm projektionen och dess längd av vektorn $(5,3,2)$ på vektorn $(2,2,1)$.

51. Uppdela vektorn $(3,2,-1)$ i två vinkelräta komposanter, av vilka den ena är parallell med vektorn $(2,1,2)$.

52. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x–, y– och z–axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.

53. Visa att vektorerna $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ är ortogonala om och endast om vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ har samma längd.

54. Kraften $\boldsymbol{F} = (9,4,5)$ påverkar en kropp belägen i punkten $P = (2,0,0)$. Kroppen rör sig rätlinjigt mot punkten $Q = (3,2,2)$. Hur stor är kraften i vägens riktning?

Svar:

47. 36.
48. $a \neq 1$ och $a \neq 2$.
49. Ja.
50. $(4,4,2)$; 6.
51. $\frac{2}{3}(2,1,2)$ och $\frac{1}{3}(5,4,-7)$.
52. $(1,-\sqrt{2},-1)$.
54. $(3,6,6)$.

55. Man säger att vektorn $\boldsymbol{u}$ är en *linjär kombination* av vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ om $\boldsymbol{u}$ kan skrivas på formen $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$. Undersök om vektorn $\boldsymbol{u} = (1,2,1)$ är en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v} = (-2,2,4)$ och $\boldsymbol{w} = (6,3,-3)$. (Med andra ord: undersök om det finns två stycken tal a och b sådana att $(1,2,1) = a(-2,2,4) + b(6,3,-3)$.)

56. Låt $\boldsymbol{u} = (1,1,2)$ och $\boldsymbol{v} = (2,1,1)$. Beräkna
    a. $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u}$
    b. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$

57. Ligger punkten $D = (4,5,3)$ i det plan som går genom punkterna A, B, C?

58. Beräkna volymen av en parallellepiped som har en kantlinje från $(1,-4,6)$ till $(4,-1,4)$, en annan från $(4,-1,4)$ till $(2,3,4)$ och en tredje från $(2,3,4)$ till $(9,5,6)$.

59. Ange ett värde på talet a så att ekvationen $(1,2,3) \times (x,y,z) = (1,a,3)$ blir lösbar.

Svar:

55. $\boldsymbol{u}$ är en linjär kombination av $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$; $a = 1/2$, $b = 1/3$.

56. a. $(7,1,-4)$ b. $(-1,3,-1)$

57. Ja.

58. 100.

59. $a = -5$.

1. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna $(1,1,2)$, $(2,2,1)$ och $(1,0,1)$.

2. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallellt med planet $x - 2y + z = 1$. Bestäm planets ekvation.

3. Ett plan går genom punkten $(1,2,3)$ och är vinkelrät med skärningslinjen mellan planen $x + y + 2z = 9$ och $2x + 3y + z = 11$. Bestäm planets ekvation.

4. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(3,1,0)$ och linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1 - t,\ 1 + t,\ 1 + t)$.

5. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(2,1,3)$ och som är vinkelrätt mot linjen $\boldsymbol{r}(t) = (t + 1,\ 1 + 2t,\ 2t + 1)$.

7. Bestäm ekvationen för skärningslinjen mellan planen $3x + y + 2z = 1$ och $x - 2y + z = 0$.

8. Planet P går genom punkten $(3,2,1)$ och är parallellt med de båda linjerna $\boldsymbol{p}(t) = (t,\ 2t + 1,\ 1 + t)$ och $\boldsymbol{r}(t) = (2t + 1,\ 1 + t,\ 2t + 2)$. Bestäm planets ekvation. Beräkna också avståndet mellan planet och den första linjen.

9. Beräkna avståndet mellan linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1 + 3t,\ 3 + t,\ -2t)$ och planet $x - y + z = 4$.

10. Bestäm avståndet från det plan som går genom punkterna $(4,3,2)$, $(6,0,0)$ och $(-2,8,4)$ till punkten $(5,4,2)$.

11. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(1,2,3)$ och som skär linjen $(x,y,z) = (6,0,4) + t(3,-2,3)$ vinkelrätt.

12. Skriv på formen $a + b\mathrm{i}$, där a och b är reella $\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}} + \dfrac{3\mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i}}$

13. Skriv på polär form $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

14. Skriv $e^{3\pi \mathrm{i}/2}$ på formen $a + b\mathrm{i}$, där a och b är reella.

<u>Svar:</u>

1. $2x - y + z = 3$.
2. $x - 2y + z = 3$.
3. $5x - 3y - z + 4 = 0$.
4. $x - y + 2z = 2$.
5. $x + 2y + 2z = 10$.
7. $\boldsymbol{r}(t) = (1 - 5t,\ t,\ 7t - 1)$.
8. $x - z = 2$, $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
9. $2\sqrt{3}$.
10. 1.
11. $(1 + 2t, 2, 3 - 2t)$.
12. $1 + \mathrm{i}$.
13. $2(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3))$.
14. $z = 1 - \mathrm{i}$, $w = 2 + \mathrm{i}$.

15. Skriv på polär form $\dfrac{(\sqrt{3} + 3\mathrm{i})^4}{(1 - \mathrm{i})^6}$

16. Lös ekvationen (rötterna skall anges på formen $a + b\mathrm{i}$, där a och b är reella)
   a. $z^2 = 8 - 6\mathrm{i}$.   b. $z^4 = -4$.

17. Lös ekvationen $z^2 - (4 - 4\mathrm{i})z - 10\mathrm{i} = 0$.

18. Lös ekvationen $(1 + \mathrm{i})z^2 + (2\mathrm{i} - 2)z + 6 - 2\mathrm{i} = 0$.

19. Bestäm talet a så att ekvationen $z^3 - az^2 - 2\mathrm{i}z + a + 5\mathrm{i} = 0$ får roten $z = a$. Bestäm de övriga rötterna.

20. Uppdela så långt som möjligt i reella faktorer $z^4 - 6z^2 + 25$.

21. Lös ekvationen $z^4 - (6 - 6\mathrm{i})z^2 - 16 + 12\mathrm{i} = 0$.

22. Man vet att $z = 1 + \mathrm{i}$ är en rot till den nedanstående ekvationen. Bestäm de övriga rötterna.
   a. $z^3 + (-1 - \mathrm{i})z^2 + z - 1 - \mathrm{i} = 0$
   b. $z^3 - 5z^2 + 8z - 6 = 0$.

<u>Svar:</u>

15. $18(\cos(-7\pi/6) + \mathrm{i}\sin(-7\pi/6))$.
16. a. $3 - \mathrm{i},\ -3 + \mathrm{i}$.   b. $1 + \mathrm{i},\ 1 - \mathrm{i},\ -1 + \mathrm{i},\ -1 - \mathrm{i}$.
17. $3 - \mathrm{i},\ 1 - 3\mathrm{i}$.
18. $-1 - 3\mathrm{i},\ 1 + \mathrm{i}$.
19. $a = 2 - \mathrm{i}$. De övriga rötterna är $1 + \mathrm{i}$ och $-1 - \mathrm{i}$.
20. $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z + 5)$.
21. $3 - \mathrm{i},\ -3 + \mathrm{i},\ \mathrm{i}\sqrt{2},\ -\mathrm{i}\sqrt{2}$.
22. a. $\pm\mathrm{i}$ b. $3,\ 1 - \mathrm{i}$.

23. Visa med induktion att $4^n - 1$ är jämnt delbart med 3 för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

24. Visa med induktion att $11^n - 1$ är jämnt delbart med 5 för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

25. Visa med induktion att $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

26. Visa med induktion att $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = 2n^4 - n^2$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

27. Beräkna
   a. $6! + 0!$
   b. $\binom{71}{43} - \binom{71}{28}$

28. Utveckla $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}\right)^4$

29. Bestäm koefficienten vid x^3 i utvecklingen av $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^7$.

<u>Svar:</u>

27. a. 721 b. 0

28. $x^{4/3} - 4 + 6x^{-4/3} - 4x^{-8/3} + x^{-4}$

29. 42

30. För vilka värden på konstanten a är planen
$$ax + y + 2z = 1 \text{ och } 6x + (a-1)y + (a+1)z = 1$$
a. vinkelräta
b. parallella?

31. Linjen L går genom punkterna $(1,1,0)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(2,3,4)$ och är parallell med linjen L. Bestäm de båda linjernas ekvationer.

32. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallellt med de båda linjerna $\boldsymbol{r}(t) = (t+1, 1+2t, 2t+1)$ och $\boldsymbol{p}(t) = (2t+3, 2+t, t+2)$. Bestäm planets ekvation.

33. Ett plan, P, ligger på avståndet 1 från planet $2x + 3y + 6z = 7$. Bestäm P:s ekvation.

34. Linjen L går genom punkterna $(1,1,2)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(1,1,5)$ och skär linjen L under rät vinkeln. Bestäm de båda linjernas ekvationer.

35. Ett plan går genom punkterna $A = (5,1,4)$ och $B = (3,1,3)$ och är parallellt med linjen $\boldsymbol{r}(t) = (3+t, 2+t, 5+2t)$. Bestäm planets ekvation.

36. Skriv på formen $a + b\mathrm{i}$, där a och b är reella,
a. $(2+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})^2$. b. $\dfrac{(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{4-\mathrm{i}}$

37. Lös ekvationerna
a. $(2-\mathrm{i})z = 3+\mathrm{i}$. b. $(2+\mathrm{i})\overline{z} = 1+3\mathrm{i}$ c. $(2+\mathrm{i})\overline{z} + \mathrm{i}z = 2-2\mathrm{i}$.

38. Skriv på polär form
a. $1-\mathrm{i}$ b. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$

Svar:

30. a. $-1/9$. b. 3.
31. L: $(x,y,z) = (1+t, 1+t, t)$. K: $(x,y,z) = (2+t, 3+t, 4+t)$.
32. $z - y = 2$.
33. $2x + 3y + 6z = 0$ eller $2x + 3y + 6z = 14$.
34. L: $(x,y,z) = (2-t, 2-t, 1+t)$. K: $(x,y,z) = (t, t, 2t+3)$.
35. $x + 3y - 2z = 0$
36. a. $-2-11\mathrm{i}$. b. $\dfrac{15}{17} + \dfrac{25\,\mathrm{i}}{17}$.
37. a. $1+\mathrm{i}$. b. $1-\mathrm{i}$. c. $1+2\mathrm{i}$.
38. a. $\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + \mathrm{i}\sin(-\pi/4))$. b. $2(\cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6))$.

39. Bestäm argumentet för $\dfrac{(3 + i\sqrt{3})^4}{(1 - i)^8}$.

40. Bestäm absolutbeloppet av $\dfrac{(3 - 2i)(1 - i)}{(2 + i)^2}$.

41. Skriv på polär form $\dfrac{(2 + 2i)(1 + i\sqrt{3})}{(\sqrt{12} - 2i)i}$

42. Lös ekvationen $(z - 1)^3 + 8i = 0$.

43. Lös ekvationen $z\bar{z} - z = 1 - i$. ($\bar{z}$ är konjugatet till z.)
Tips: Sätt $z = a + bi$.

44. Lös ekvationen $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$.

45. Bestäm en polynomekvation av lägsta möjliga grad, som
   a. har rötterna $1 - 2i$ och i.
   b. har rötterna $1 - 2i$ och i samt reella koefficienter.

46. Ange summan resp. produkten av rötterna till ekvationen
   a. $z^2 + (3 - 2i)z + 1 - 3i = 0$.
   b. $z^3 - (6 - 3i)z^2 + (8 - 12i)z + 10i = 0$.

47. Två av rötterna till ekvationen $z^3 - (2 + 3i)z^2 - (4 - 4i)z + 4 + 2i = 0$ har produkten $1 + 3i$. Lös ekvationen.

48. Ekvationerna $z^3 - (1 - i)z^2 - 8iz + 8 + 8i = 0$ och $z\bar{z} - z = 1 + i$ har en rot gemensam. Lös den första ekvationen.

Svar:

39. $2\pi/3$.

40. $\sqrt{26}/5$.

41. $\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$.

42. $1 + \sqrt{3} - i$, $1 - \sqrt{3} - i$, $1 + 2i$.

43. i, $1 + i$.

44. $1 + 3i$, $-1 + i$

45. a. $z^2 - (1 - i)z + 2 + i = 0$. b. $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5 = 0$.

46. a. summan $= -3 + 2i$, produkten $= 1 - 3i$.
   b. summan $= 6 - 3i$, produkten $= -10i$.

47. $1 + i$, $2 + i$ och $-1 + i$.

48. $1 - i$, $2 + 2i$, $-2 - 2i$

49 Bestäm de reella talen a och b så att ekvationen $z^3 + az + b = 0$ får roten $z = 1 - 2i$. Lös ekvationen.

50. Visa att polynomet $(z - w)(z - \bar{w})$ har reella koefficienter. ($\bar{w}$ är konjugatet till w.)

51. Uppdela så långt som möjligt i reella faktorer $z^6 - 7z^3 - 8$.

52. Visa med induktion att $\left(2 + \frac{1}{10}\right)^n \geq 2^n + \frac{n}{10}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

53. Beräkna

a. $\binom{7}{4}$

b. $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \ldots + \binom{9}{9}$.

54. Utveckla $(2x - y)^5$

55. Man vet att utvecklingen av $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right)^n$ innehåller termen $14x$. Bestäm n.

56. Visa med induktion att $\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$.

57. Visa med induktion att $2 \cdot 10^n + 3 \cdot 10^{n-1} + 4$ är jämnt delbart med 9 för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

58. Visa att $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Ledning: Observera att $k \cdot k! = (k + 1)! - k!$.

Svar:

49. $a = 1$, $b = 10$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = -2$.
51. $(z - 2)(z + 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + 2z + 4)$.
53. a. 35 b. 2^9.
54. $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$
55. $n = 7$.

1. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

   a. $\arcsin\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ b. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\dfrac{-1}{2}$

   c. $\cos\arcsin\dfrac{1}{4}$

2. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

   a. $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ b. $\cot\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

   c. $\cos\left(2\arccos\dfrac{2}{3}\right)$

3. Lös ekvationen $2\arcsin x=\arccos x$.

4. Visa att $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$.

5. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

6. Finns det något värde på konstanten A så att funktionen

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x^4}} & \text{då } x\neq 0\\ A & \text{då } x=0\end{cases}$$

   blir kontinuerlig i punkten $x=0$?

7. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(1+3x)-\ln(1+x)\right)$.

8. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

   a. $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ b. $(\sin x+\cos x)\sin x$ c. $(1+2x)^9$

<u>Svar:</u>

1. a. $-\pi/4$ b. $\pi/6$ c. $\sqrt{15}/4$
2. a. $4/5$ b. $1/2$ c. $-1/9$
3. $1/2$
5. $1/2$
6. Nej.
7. $\ln 3$.

8. a. $\dfrac{1}{1 + \sin 2x}$ b. $\sin 2x + \cos 2x$ c. $18\,(1 + 2x)^8$

9. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $y = \dfrac{(1-x)^8}{(2x-3)^9}$ i punkten (2,1).

10. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\ln\sqrt{\tan 2x}$.   b. $\operatorname{arccot} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

11. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $x^3 - xy + y^3 = 7$ i punkten (2,1).

12. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\ln \sin(2x + 1)$ b. $\arctan\sqrt{2x-1}$

13. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan

$$\sqrt{2x + y} + \sqrt{x + y^3} = 5$$

i punkten (1,2).

14. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:

a. $f(x) = 4 \arctan x + 5 \operatorname{arccot} 2x$

b. $f(x) = 2 \ln(1 + (2x - 2)^2) + \operatorname{arccot}(2x - 2) + 2x$

15. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen $f(x) = 6 \ln(1 + 2x) - \ln(1 + 4x^2) - 6 \arctan 2x$.

16. Bestäm största och minsta värdena till följande funktioner:

a. $2x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\ 0 \le x \le 1$.

b. $x + 2 \ln(-4 + 6x - x^2),\ 1 \le x \le 5$.

<u>Svar:</u>

9. Tangent: $10x + y = 21$. Normal: $x - 10y + 8 = 0$.

10. a. $\dfrac{2}{\sin 4x}$ b. $\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

11. Tangent: $11x + y = 23$. Normal: $x - 11y + 9 = 0$.

12. a. $2\cot(2x + 1)$ b. $\dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$

13. b. Tangent: $8x + 27y = 62$. Normal: $27x - 8y = 11$.

14. a. Lok max i -1, lok min i 1.

b. Lok max i -1, lok min i 1

15. Lok max i 0, lok min i 1.

16. a. $\sqrt{3}/2 + \pi/2$ och 0.   b. $4 + 4\ln 2$ och 1.

17. Visa följande olikheter:
    a. $2\ln x \le x^2 - 1$, för alla $x \ge 0$.
    b. $\ln(1 + 2x) \ge \dfrac{3x}{x + 2}$, för alla $x \ge 0$.
    c. $\sin x + \cos x \le 1 + 2x$, för alla $x \ge 0$.

18. Visa att funktionen f är inverterbar
    a. $f(x) = 3x - \arctan 2x$.

19. Bestäm i förekommande fall det största och det minsta värdet till följande funktioner:
    a. $f(x) = \ln(x + 1) - 2\arctan\sqrt{x}$.
    b. $f(x) = \dfrac{-2x}{4x^2 + 1} + \arctan 2x$.

<u>Svar:</u>

19. a. min $= \ln 2 - \pi/2$, max saknas.
    b. Max och min saknas.

20. Beräkna $\arccos \cos \frac{-\pi}{9}$ (svaret får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

21. Verifiera att $\arcsin \frac{13}{14} + \arccos \frac{1}{7} = \frac{5\pi}{6}$.

22. Bestäm de sammansatta funktionerna $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ och $g \circ g$ om $f(x) = \sqrt{x+1}$ och $g(x) = x^2 - 1$.

23. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4^{x+1} + 3^{x+2}}{4^{x+3} + 3^{x+4}}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}$

24. Beräkna högergränsvärde, vänstergränsvärde och gränsvärde i punkten $x = 3$ för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{då } x < 3 \\ \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{då } x > 3 \end{cases}.$$

25. Beräkna följande gränsvärden:

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{3x + 2}$ c. $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan \frac{x}{x+1}$

d. $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan \frac{x^2}{x+1}$ f. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3x+2} - 2}{\sqrt{x-2}}$

26. Beräkna högergränsvärde, vänstergränsvärde och gränsvärde i punkten $x = 3$ för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{då } x < 3 \\ \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} & \text{då } x > 3 \end{cases}.$$

Svar:

20. $\pi/9$

22. $f \circ g(x) = |x|$, $g \circ f(x) = x$, $f \circ f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x+1}}$, $g \circ g(x) = x^4 - 2x^2$.

23. a. $-1/4$ b. $1/16$ c. 2

24. högergränsvärde = vänstergränsvärde = gränsvärde = 2

25. b. $2/3$ c. $\pi/4$ d. $\pi/2$ f. $\sqrt{3}$

26. b. högergränsvärde = 4, vänstergränsvärde = 2, gränsvärde finns inte.

27. Bestäm värdet på konstanten a så att $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + a}{x-1}$ är ändligt och beräkna gränsvärdet.

28. Kan funktionen f definieras i punkten $x = 1$ så att f blir kontinuerlig i denna punkt?

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} & \text{då } 1 < x < 2 \\ x^2 + x - 6 & \text{då } x < 1 \end{cases}$ b. $f(x) = \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$

29. Visa att ekvationen $x^6 + 3x + 1 = 0$ har minst en reell lösning.

30. Visa att kurvorna $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ och $y = x^4 + x^3 - 2x + 4$ har minst en gemensam skärningspunkt.

31. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\frac{4x+5}{2x+3}$ d. $2\sqrt{1+x} + \sqrt{1+2x}$ f. $\sin^9 x$

32. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan
a. $y = (1-x)^9(2x-3)^8$ i punkten $(2,-1)$.

33. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\cos^2 \frac{1}{x}$. b. $x^{\sin x}$.

34. Beräkna derivatorna $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{d^2y}{dx^2}$ uttryckta i x och y då funktionen $y = y(x)$ definieras av:

a. $x^3y^3 + xy = 1$. b. $\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 1$.

Svar:

27. $a = -2$, gränsvärdet = 3.
28. a. Ja, $f(1) = -4$. b. Nej.
31. a. $\frac{2}{(2x+3)^2}$ d. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ f. $9 \cos x \sin^8 x$
32. a. Tangent: $25x + y = 49$. Normal: $x - 25y = 27$.
33. a. $\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$ b. $x^{\sin x - 1}(x \cos x \ln x + \sin x)$
34. a. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$ b. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

35. Det finns en punkt på kurvan

$$y = x + 2 + \frac{1}{5}\ln(x+1) - \frac{1}{10}\ln(4x^2+1) - \frac{1}{10}\arctan 2x$$

där tangenten till kurvan bildar vinkeln $\frac{\pi}{4}$ med x–axel. Bestäm en ekvation för denna tangent.

36. Det finns en punkt på kurvan

$$y = 2 - x + \frac{4}{5}\ln(x+1) + \frac{1}{10}\ln(4x^2+1) - \frac{2}{5}\arctan 2x$$

där normalen till kurvan bildar vinkeln $\frac{\pi}{4}$ med x–axel. Bestäm en ekvation för denna normal.

37. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\sin^9 2x$ b. $(x - x^2)e^{-x}$ c. $(2x+1)^3(1-x)^4$

38. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:

a. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$. b. $f(x) = x + \arctan(1-2x)$.
c. $f(x) = x + \ln(2 - 2x + x^2)$. d. $f(x) = 4x + 5\ln(2 - 2x + x^2)$.

39. Ekvationen $x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$ definierar en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 1$. Bestäm derivatan $y'(x)$ utryckt i x och y. Visa att $x = 1$ är en lokal extrempunkt till y och bestäm dess karaktär.

40. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen $f(x) = 6\ln(1+2x) - \ln(1+4x^2) - 6\arctan 2x$.

41. Bestäm största och minsta värdena till följande funktioner:

a. $4\sqrt{1-x^2} + 3x$. b. $x^2 - 4|x-1| - 2x,\ 0 \le x \le 4$.

42. Visa olikheten $e^{-x} \ge 1 - x$, för alla x.

Svar:

35. $y = x + 2$.
36. $y = x + 2$.
37. a. $18\cos 2x \sin^8 2x$ b. $(1 - 3x + x^2)e^{-x}$ c. $2(7x-1)(2x+1)^2(x-1)^3$
38. a. Lok min i 1 och 3, lok max i 2. b. Lok max i 0, lok min i 1.
c. Finns inga. d. Lok max i –1, lok min i 1/2.
39. $y' = \dfrac{x^2 - y}{x + y^2}$, $x = 1$ är en lokal minimipunkt.
40. Lok max i 0, lok min i 1.
41. a. 5 och –3. b. –1 och –5.

43. Visa olikheten $\ln(1 + 2x) + \ln(1 + 3x) \le 5x$, för alla $x \ge 0$.

44. Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionen

a. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

b. $f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x$.

45. Hur stor kan produkten ab av två tal a och b maximalt vara om $a^4 + 2b^2 = 48$?

46. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x) = (x + 1)(a - \arctan x)$ har en kritisk punkt för $x = 0$. Avgör också om det är ett lokalt maximum eller minimum eller en terrasspunkt.

47. För vilka värden på konstanten a är funktionen $f(x) = ax - 3 \arctan 2x$ inverterbar?

45. Hur stor kan lutningen hos tangenten till kurvan $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ vara maximalt?

50. Visa att $x^4 + 32\,|x - 1| \ge 1$ för alla x.

<u>Svar:</u>

44. a. $D_f = [1, 3]$, $V_f = [\sqrt{2}, 2]$.

b. $D_f = [-1,1]$, $V_f = [\pi/2, \sqrt{2} - \pi/2]$.

45. 8.

46. $a = 1$; lokalt maximum.

47. $a \ge 6$ eller $a \le 0$.

48. 1.

1. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
   a. $f(x) = \sin 3x$. b. $f(x) = \ln(1 + 2x)$.
   c. $f(x) = \ln(1 + 2x) \sin 3x$. (Använd 1a och b.)

2. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
   b. $f(x) = \ln(3 + 2x)$ kring $x = 0$
   c. $f(x) = \ln(1 + 2x)$ kring $x = 1$ (Använd 2b.)

3. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
   a. $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x}$ kring $x = 0$ b. $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x}$ kring $x = -1$

4. Beräkna följande gränsvärden:
   a. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan 2x + \sin 3x}{\ln(1 - 4x) + 5x}$ b. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\sin 3x}{1 - e^{2x}}$
   c. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - e^{3x}}{e^{-x} - 1}$ d. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3\arctan 2x - 2\ln(1 + 3x)}{1 - \cos 4x}$

5. Beräkna följande gränsvärden:
   a. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (2\ln(3 + 4x^5) - 5\ln(4 + 3x^2))$ (Skriv på formen ln(bråk).)
   b. $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{1/x}$ (Använd $a^b = e^{b \ln a}$.)

6. Bestäm eventuella asymptoter till kurvorna:
   a. $y = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1} - x^2$

7. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
   a. $y'' - y' - 2y = 2x + 1$. b. $y'' + 6y' + 9y = 27x$.

Svar:

1. a. $3x - 9x^3/2 + O(x^4)$. b. $2x - 2x^2 + 8x^3/3 + O(x^4)$.
   c. $6x^2 - 6x^3 + O(x^4)$.
2. a. $\ln(3) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + O(x^3)$ b. $\ln(3) + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{2}{9}(x - 1)^2 + O((x - 1)^3)$
3. a. $1 - 2x + 4x^2 + O(x^3)$ b. $-1 - 2(x + 1) - 4(x + 1)^2 + O((x + 1)^3)$
4. a. 5. b. 2.
   c. 3. d. 9/8.
5. a. $4\ln 2 - 5\ln 3$. b. e^2.
6. a. $y = 3$.
7. a. $y = -x + Ae^{-x} + Be^{2x}$ b. $y = e^{-3x}(A + Bx) + 3x - 2$

8. Bestäm den lösning till $y'' - y' - 2y = 0$ som uppfyller $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

9. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

   a. $y'' + y' - 2y = 4xe^{-x}$. b. $y'' + y' - 2y = 20 \cos 2x\, e^{-x}$.

   c. $y'' + y = 2 \cos x$. d. $y'' - 2y' = 4x$.

   e. $y'' + 4y = 24 \sin 4x$. f. $y'' - 4y' + 13y = 40 \cos x$.

10. Bestäm den lösning till $y'' - y' - 2y = 2x + 1$ som uppfyller $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

11. Beräkna följande integraler:

   a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x}}\,dx$ b. $\displaystyle\int_0^1 (1-2x)^{100}\,dx$

   c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ d. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

   e. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$ f. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$

12. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan $y = x - \sqrt{x}$ och x–axeln.

13. Beräkna följande integraler:

   a. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$ b. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

   c. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{9+x^2}\,dx$

<u>Svar:</u>

8. $y = 1/3e^{-x} + 5/3e^{2x}$

9. a. $y = (1-2x)e^{-x} + Ae^{x} + Be^{-2x}$

   b. $y = (-\sin 2x - 3 \cos 2x)e^{-x} + Ae^{x} + Be^{-2x}$

   c. $y = x \sin x + A \sin x + B \cos x$

   d. $y = -x - x^2 + A + Be^{2x}$

   e. $y = -2 \sin 4x + A \sin 2x + B \cos 2x$

   f. $y = 3 \cos x - \sin x + Ae^{2x} \sin 3x + Be^{2x} \cos 3x$

10. $y = -x + 2e^{2x}$

11. a. 10/27. b. 1/101. c. 1/4. d. ln 3.

    e. ln 3. f. $\ln 2 + \pi/4$.

12. 1/6.

13. a. $\pi/8$ b. $\pi/8$ c. $\ln 5 - \ln 3$

14. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{2-x}$ och $y = x\sqrt{2-x}$.

15. Beräkna följande integraler:

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-2x)e^{-2x}\,dx$ b. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} x^2\cos x\,dx$

c. $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(x+1)\,dx$ d. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\ln(x+1)\,dx$

16. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \dfrac{5}{9-x^2}$ och $y = \dfrac{8}{4+x^2}$.

17. Beräkna följande integraler:

a. $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x+1)\arctan\sqrt{x}\,dx$ b. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \sin^3 x}\,dx$

c. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\,dx$

18. Beräkna följande integraler:

a. $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)\,dx$ b. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\arctan x\,dx$

19. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av x–axeln och kurvan $y = (x-3)\sqrt{4-x}$.

<u>Svar:</u>

14. 4/15.

15. a. $e^2 + e^{-2}$. b. 4π. c. $2\ln 2 - 1$.
d. 1/4 g. –2 h. $3\ln 5 - 4\ln 2$

16. $2\pi - (5\ln 5)/3$.

17. a. $\pi/2 - 1/3$. b. $(\ln 5 - \ln 2)/2$. c. $1 + \ln 2 - \ln 3$.

18. a. $\ln 2 - 2 + \pi/2$ b. $\pi/4 - 1/2$

19. 4/15.

20. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till funktionnen $f(x) = e^{-3x}$. Restermen ges på ordoform.

21. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 2 till följande funktionen
$$f(x) = \ln(1 + 2x).$$
Restermen ges på ordoform.

22. Betrakta funktionen $f(x) = 4\,e^{-x} - e^{2x} - 3\sin 2x + 12\sin x$.
   a. Bestäm Taylorpolynomet av fjärde graden till f kring punkten $x = 0$.
   b. Använd resultatet i a för att visa att $f(x) < 3$ om x ligger tillräckligt nära 0.

23. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
   a. $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$.
   b. $f(x) = e^{-3x}\sqrt{1 + 2x}$.

24. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
   a. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ kring $x = 0$
   b. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ kring $x = 1$

25. Betrakta funktionen $f(x) = (e^{2x} - \cos^2 x)\cdot(\sin x - \ln(1 - x))$.
   a. Bestäm MacLaurinpolynomet av andra graden till f.
   b. Sök $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

26. Betrakta kurvan $2y = x + x^2 \ln \dfrac{1 + x}{x} - \ln(1 + x)$. Låt $f(x)$ beteckna vinkel mellan tangenten till kurvan i punkten (x,y) och x–axeln. Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

27. Beräkna följande gränsvärden:
   a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin 2x \ln x$
   b. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 6x)^{\cot 3x}$

Svar:

20. $1 - 3x + 9x^2/2 - 9x^3/2 + O(x^4)$.
21. $2x - 2x^2 + O(x^3)$
22. $3 - \dfrac{1}{2}x^4$.
23. a. $1 + x - x^2/2 + x^3/2 + O(x^4)$. b. $1 - 2x + x^2 + 2x^3 + O(x^4)$.
24. a. $2 + 3x + 4x^2 + O(x^3)$ b. $14 + 26(x - 1) + 19(x - 1)^2 + O((x - 1)^3)$
25. a. $4x^2$. b. 4.
26. $\pi/4$.
27. a. 0. b. e^2.

28. Bestäm eventuella asymptoter till kurvan $y = \dfrac{(2x+1)\arctan 4x}{x+1}$.

29. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
a. $y'' - y' - 2y = 0$.
b. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
c. $y'' - 6y' + 13y = 0$.
d. $2y'' + 3y' + y = 0$.

30. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
a. $y'' + y' - 2y = 4xe^{-x}$.
b. $y'' + y' - 2y = 20\cos 2x\, e^{-x}$.
c. $y'' + y = 2\cos x$.
d. $y'' - 2y' = 4x$.
e. $y'' + 4y = 24\sin 4x$.
f. $y'' - 4y' + 13y = 40\cos x$.

31. Bestäm den lösning till $y'' - y' - 2y = 2x + 1$ som uppfyller $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

32. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
a. $y'' - y' = 2x + 1$.
b. $y'' - y' - 2y = 4e^{3x}$.
c. $y'' - y' - 2y = 20\cos 2x$.

33. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
a. $y'' + y' - 2y = 40\sin x\cos x$. (Förenkla högerledet: $2\sin x\cos x = \sin 2x$.)
b. $y'' - 3y' + 2y = 4x + 10\cos x$.
c. $y''' + 3y'' - y' - 3y = 9x$.
d. $y''' - y'' + y' - y = e^{-x}$

34. Bestäm den lösning till $y'' + y' - 2y = 4xe^{-x}$ som uppfyller $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

Svar:

28. $y = \pi$, $y = -\pi$, $x = -1$.
29. a. $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$
b. $y = e^{3x}(A + Bx)$
c. $y = e^{3x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$
d. $y = Ae^{-x} + Be^{-x/2}$
30. a. $y = (1 - 2x)e^{-x} + Ae^{x} + Be^{-2x}$
b. $y = (-\sin 2x - 3\cos 2x)e^{-x} + Ae^{x} + Be^{-2x}$
c. $y = x\sin x + A\sin x + B\cos x$
d. $y = -x - x^2 + A + Be^{2x}$
e. $y = -2\sin 4x + A\sin 2x + B\cos 2x$
f. $y = 3\cos x - \sin x + Ae^{2x}\sin 3x + Be^{2x}\cos 3x$
31. $y = -x + 2e^{2x}$
32. a. $y = -3x - x^2 + A + Be^{x}$
b. $y = e^{3x} + Ae^{-x} + Be^{2x}$
c. $y = -\sin 2x - 3\cos 2x + Ae^{-x} + Be^{2x}$
33. a. $y = -3\sin 2x - \cos 2x + Ae^{x} + Be^{-2x}$
b. $y = 3 + 2x + \cos x - 3\sin x + Ae^{x} + Be^{2x}$
c. $y = Ae^{-x} + Be^{x} + Ce^{-3x} - 3x + 1$
d. $y = A\cos x + B\sin x + Ce^{x} - e^{-x}/4$
34. $y = (1 - 2x)e^{-x} + 3e^{x} - e^{-2x}$

1. Beräkna följande integraler:

a. $\displaystyle\int_4^5 \frac{3x-7}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_4^5 \frac{3x^2-7x-4}{(x-3)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_5^6 \frac{x^2-5x+10}{x^2-6x+8}\,\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-10x+11}{(x-3)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

f. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+16\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

g. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

h. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x$

2. Beräkna derivatan $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ då $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t$.

3. Beräkna arean av det området som begränsas av

a. kurvan $y = x\sqrt{1-x^2}$ och x–axeln.

b. kurvan $y^2 = x^2 - x^3$.

4. Beräkna följande generaliserade integraler:

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)x^2}\,\mathrm{d}x$

5. Beräkna arean av det oändliga området som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$.

6. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

Svar:

1. a. $\ln 6$. b. $1 + \ln 6$. c. $3\ln 5 - 4\ln 2$
   d. $1 + 2\ln 3 - \ln 2$. e. $\ln 3 - \pi$. f. $\frac{1}{4}\arctan 4$
   g. $(\ln 3 - \ln 2)/2$. h. $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$.
2. $\sin x^2$
3. a. $2/3$. b. $8/15$.
4. a. $\pi/4$. b. $1 - \pi/4$.
5. 2.
6. $4/3$.

7. Beräkna volymen av den kropp som uppstår vid rotation av området
   a. mellan kurvan $y = \sqrt{1-x}$ och koordinataxlarna kring x–axeln.
   b. mellan kurvan $y = \sqrt{1-x}$ och koordinataxlarna kring y–axeln.

8. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan y–axeln och kurvorna $y = \cos x$, $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi/4$, roterar ett varv
   a. kring x–axeln.
   b. kring y–axeln.

9. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av
   a. x–axeln och kurvorna $y = \tan x$, $y = \cot x$, $0 \le x \le \pi/2$.
   b. y–axeln och kurvorna $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.
   c. y–axeln och kurvorna $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

10. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då ytstycket mellan linjen $x = 1$ och kurvan $y^2 = 4x$ roterar ett varv kring linjen $y = 2$.

11. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av x–axeln och kurvan $y = (x-1)\sqrt{2x - x^2}$ roterar ett varv kring linjen $x = 1$.

12. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:
   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$
   b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n}$
   c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+7}$
   d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

<u>Svar:</u>

7. a. $\pi/2$. b. $8\pi/15$.

8. a. $\pi/2$. b. $\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{2} - 2\pi$

9. a. $\ln 2$. b. $\ln 2$. c. $2 - \sqrt{2}$

10. $\dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

11. $\pi^2/4$.

12. a. Konvergent b. Divergent.
   c. Divergent. d. Konvergent.

13. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n^2}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n+3^n}$

14. Avgör om följande serier är absolut konvergenta, betingat konvergenta eller divergenta:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}$

15. Undersök konvergensen av följande generaliserade integraler:

a. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

b. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Svar:

13. a. Divergent. b. Divergent.
    c. Konvergent. d. Divergent.
14. a. Betingat konvergent. b. Absolut konvergent.
15. a. konvergent b. konvergent

16. Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ på intervallet $0 \le x \le 3$.

17. Beräkna derivatan $\dfrac{dF}{dx}$ då $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} \sin t^2 \, dt$.

18. Beräkna följande integraler:

a. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x}\, dx$ b. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x}\, dx$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - 3x^2}}\, dx$ d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}\, dx$

19. Beräkna arean av det området som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{1 - 4x^2}$ och $y = \sqrt{1 - 2x}$.

20. Beräkna följande generaliserade integraler:

a. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1 + 5x^2}{(1 + x^2)x^2}\, dx$ b. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 x^2}$.

21. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan x–axeln och kurvan $y = \pi/2 - \dfrac{\arcsin x}{x}$ roterar ett varv kring y–axeln.

22. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{5^n}$ b $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)^2$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2000 + 1999n}$ d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2+1)\sqrt{n}}$

Svar:

16. a. $\frac{1}{4}\arctan 4$ b. $(\ln 3 - \ln 2)/2$.   c. $\pi/6$.   d. $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$.

17. $3 \sin 9x^2 - 2 \sin 4x^2$.

18. a. $(\ln 3)/4$.   b. $\ln 3 - \ln 2$.
    c. $\pi\sqrt{3}/9$.   d. $-\ln(\sqrt{2} - 1)$

19. $\pi/8 - 1/3$.

20. a. $1 + \pi$.   b. $1/2$.

21. $2\pi - \pi^2/2$.

22. a. Divergent.   b. Konvergent.
    c. Divergent.   d. Konvergent.

23. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+2n}\right)^n$

24. Undersök konvergensen av följande generaliserade integraler:

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1-\sqrt{x}}\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x(1+x^4)}\,dx$

25. Beräkna följande integraler:

a. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{9+x^2}\,dx$

b. $\displaystyle\int_1^5 |x-2|\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

d. $\displaystyle\int_0^2 (2x-3)\ln(3-x)\,dx$

26. Beräkna följande integraler:

a. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$

b. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx$

c. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$

d. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)x^2}\,dx$

e. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2-x-1}{x^2-3x+2}\,dx$

Svar:

23.	a.	Konvergent.	b.	Konvergent	c.	Konvergent		
24.	a.	divergent	b.	divergent				
25.	a.	$3 - 3\pi/4$	b.	5.	c.	1/2.	d.	-2
26.	a.	$3\ln 2 - \ln 3$.	b.	$1 + \ln 3 - 2\ln 2$.	c.	$\pi/8$.		
	d.	$1/2 - \arctan 2 + \pi/4$			e.	$1 + \ln 3$.		