KTH Matematik

Kompletteringsskrivning till repetitionskursen i envariabelanalys, 2007–08–11, kl 10.00–11.00.

Gäller kurserna 5B1102/1, 5B1103/1, 5B1104, 5B1106, 5B1115, 5B1124, 5B1135, 5B1147.

Den som missade lappskrivning n ($n = 1, 2, \ldots, 5$) skall göra uppgift n.
Godkänd lappskrivning n ($n = 1, 2, \ldots, 5$) innebär att uppgift n är godkänd och inte skall lösas.
Man kan få högst betyg 3 (3E). För betyg 3 (3E) krävs att alla uppgifter är godkända samt godkänd närvaro på kursen.
Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

   a. $\sin\left(2 \arccos \frac{3}{5}\right)$.

   b. $\cos(2 \operatorname{arccot} 2)$.

2. Bestäm en ekvation för tangenten och normalen till kurvan

$$8\sqrt[3]{y - x} - \sqrt{y^3 - 4x} = 6$$

   i punkten (1,2).

3. a. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen

$$f(x) = x + 2 - 4\sqrt{x - 3}.$$

   b. Bestäm största och minsta värdena till $x + 2 - 4\sqrt{x - 3}$ då $4 \le x \le 19$.

4. Bestäm den lösning (de lösningar) till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 5y = 10$$

   som uppfyller villkoren $y(0) = 2$, $y(\pi/4) = 2$.

5. Beräkna integralen

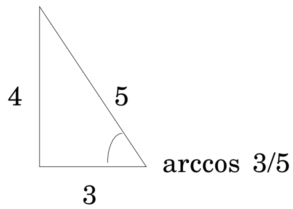
$$\int_4^7 \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 3}\, dx.$$

Lycka till!

Lösningsförslag kommer att finnas på kursens hemsida.
De rättade skrivningarna kan så småningom hämtas på studentexpeditionen. Meddelande om detta kommer att finnas på kursens hemsida.

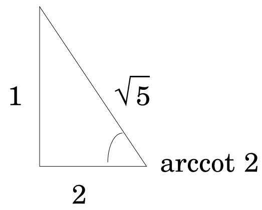
Lösningsförslag till kompletteringen till repetitionskursen i Envariabelanalys, 2007–08–11.

1a. Vi har $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ och för $x = \arccos\frac{3}{5}$ får man



$$\sin\arccos\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$
$$\cos\arccos\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$
$$\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right) = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}.$$

1b. Vi har $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ och för $x = \operatorname{arccot} 2$ får man



$$\cos(\operatorname{arccot} 2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\sin(\operatorname{arccot} 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\cos(2\operatorname{arccot} 2) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Svar: $\sin(2\arccos 3/5) = 24/25$, $\cos(2\operatorname{arccot} 2) = 3/5$.

---

2. Implicit derivering av $8\sqrt[3]{y-x} - \sqrt{y^3-4x} = 6$ med avseende på x ger

$$\frac{8(y'-1)}{3(y-x)^{2/3}} - \frac{3y^2y'-4}{2\sqrt{y^3-4x}} = 0$$

För $x = 1, y = 2$ får man $\frac{8(y'-1)}{3} - \frac{12y'-4}{4} = 0$ dvs $y'(2) = -5$.

Tangenten i punkten $(1,2)$ ges av $\frac{y-2}{x-1} = y'(2) \Leftrightarrow 5x + y = 7$.

Normalen i punkten $(1,2)$ ges av $\frac{y-2}{x-1} = -\frac{1}{y'(5)} \Leftrightarrow x - 5y + 9 = 0$.

Svar: Tangenten ges av $5x + y = 7$. Normalen ges av $x - 5y + 9 = 0$.

3a. Funktionen f är definierad på intervallet $x \geq 3$ och deriverbar på intervallet $x > 3$. Ett lokalt extremvärde antas antingen i en kritisk punkt eller i endpunkten $x = 3$.

Kritiska punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x-3}}$$
$$1 - \frac{2}{\sqrt{x-3}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Leftrightarrow x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7$$

Vi får att

$f'(x) < 0$ för alla $3 < x < 7 \Rightarrow f$ är strängt avtagande på intervallet $3 < x < 7$
$f'(x) > 0$ för alla $7 < x \Rightarrow f$ är strängt växande på intervallet $x > 7$

vilket innebär att f har en lokal minimum i punkten $x = 7$. Kontinuiteten av f medför att $x = 3$ är en lokal maximipunkt.

3b. Funktionen f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $4 \leq x \leq 19$ vilket medför att f antar ett största och ett minsta värde på intervallet. Eftersom f är deriverbar på detta intervall så antas dessa värden antingen i en kritisk punkt eller i en ändpunkt på intervallet. Enligt a–delen av denna uppgift finns det endast en kritisk punkt $x = 7$.

De aktuella punkterna är $x = 4, x = 7$ och $x = 19$. I dessa punkter antar f värdena $f(4) = 2, f(7) = 1$ och $f(19) = 5$ alltså minsta värdet = 1 och största värdet = 5.

Svar:
a. lokal maximum i $x = 3$, lokal minimum i $x = 7$
b. minsta värdet = 1 och största värdet = 5

---

4. Karakteristisk ekvation är här

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(r-1)^2 = -4 \Leftrightarrow$$
$$r = 1 \pm 2\mathrm{i}.$$

Följaktligen är

$$y_h = (A \cos 2x + B \sin 2x)\mathrm{e}^x$$

den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' - 2y' + 5y = 10$. Ansats $y = a$ ger $y' = y'' = 0$ vilket, insatt i ekvationen, ger $5a = 10$, dvs $a = 2$. Detta innebär att $y_p = 2$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$ dvs $y = (A \cos 2x + B \sin 2x)\mathrm{e}^x + 2$.

Ur villkoret $y(0) = 2$ får vi att $2 = A + 2$, dvs $A = 0$ och följaktligen är $y = B \sin 2x\ \mathrm{e}^x + 2$.

Ur villkoret $y(\pi/4) = 2$ får vi att $2 = B \sin \pi/2\ \mathrm{e}^{\pi/4} + 2$, dvs $B = 0$ och $y = 2$.

Svar: $y = 2$.

---

5. Vi har

$$\frac{3x-7}{x^2-4x+3} = \frac{3x-7}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

”Handpåläggning” ger $A = 2$ och $B = 1$.

$$\int_4^7 \frac{3x-7}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x = \int_4^7 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \Big[2\ln(x-1) + \ln(x-3)\Big]_4^7 = 2\ln 6 + \ln 4 - 2\ln 3 - \ln 1 = 4\ln 2.$$

Svar allmänt: $4 \ln 2$.
