

1. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

a. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

b. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin \frac{-1}{2}$

c. $\cos \arcsin \frac{1}{4}$

2. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

a. $\sin\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

b. $\cot \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$

c. $\cos\left(2 \arccos \frac{2}{3}\right)$

3. Lös ekvationen $2 \arcsin x = \arccos x$.

4. Visa att $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$.

5. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$.

6. Finns det något värde på konstanten A så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x^4}} & \text{då } x \neq 0 \\ A & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i punkten $x = 0$?

7. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + 3x) - \ln(1 + x))$.

8. Beräkna $\arccos \cos \frac{-\pi}{9}$ (svaret får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner):

9. Verifiera att $\arcsin \frac{13}{14} + \arccos \frac{1}{7} = \frac{5\pi}{6}$.

10. Bestäm de sammansatta funktionerna $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ och $g \circ g$ om $f(x) = \sqrt{x + 1}$ och $g(x) = x^2 - 1$.

11. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 1 + 3^x + 2}{4^x + 3 + 3^x + 4}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}$

12. Beräkna högergränsvärde, vänstergränsvärde och gränsvärde i punkten $x = 3$ för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{då } x < 3 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{då } x > 3 \end{cases}.$$

13. Beräkna följande gränsvärden:

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{3x+2}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{x}{x+1}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{x^2}{x+1}$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x+2} - 2}{\sqrt{x-2}}$

14. Beräkna högergränsvärde, vänstergränsvärde och gränsvärde i punkten $x = 3$ för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{då } x < 3 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} & \text{då } x > 3 \end{cases}.$$

15. Bestäm värdet på konstanten a så att $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + a}{x - 1}$ är ändligt och beräkna gränsvärdet.

16. Kan funktionen f definieras i punkten $x = 1$ så att f blir kontinuerlig i denna punkt?

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} & \text{då } 1 < x < 2 \\ x^2 + x - 6 & \text{då } x < 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$

17. Visa att ekvationen $x^6 + 3x + 1 = 0$ har minst en reell lösning.

18. Visa att kurvorna $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ och $y = x^4 + x^3 - 2x + 4$ har minst en gemensam skärningspunkt.

19. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla cyklometrisk eller trigonometriska funktioner):

a. $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{2}{3}\right)$

b. $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} - \arccos \frac{2}{3}\right)$

c. $\cos\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{2}{3}\right)$

d. $\cos\left(\arcsin \frac{1}{3} - \arccos \frac{2}{3}\right)$

20. Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \sin(x-1)}{3(x^2-1)}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1+3x) - \ln(1+x))$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \ln \sqrt{x}}{1 + e^x}$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7+3x}{1+3x} \right)^x$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7+3x}{1+3x} \right)^x$$

Svar:

$$1. \quad \text{a. } -\pi/4$$

$$\text{b. } \pi/6$$

$$\text{c. } \sqrt{15}/4$$

$$2. \quad \text{a. } 4/5$$

$$\text{b. } 1/2$$

$$\text{c. } -1/9$$

$$3. \quad 1/2$$

$$5. \quad 1/2$$

$$6. \quad \text{Nej.}$$

$$7. \quad \ln 3.$$

$$8. \quad \pi/9$$

$$10. \quad f \circ g(x) = |x|, \quad g \circ f(x) = x, \quad f \circ f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x+1}}, \quad g \circ g(x) = x^4 - 2x^2.$$

$$11. \quad \text{a. } -1/4$$

$$\text{b. } 1/16$$

$$\text{c. } 2$$

$$12. \quad \text{högergränsvärde} = \text{vänstergränsvärde} = \text{gränsvärde} = 2$$

$$13. \quad \text{b. } 2/3$$

$$\text{c. } \pi/4$$

$$\text{d. } \pi/2$$

$$\text{f. } \sqrt{3}$$

$$14. \quad \text{b. } \text{högergränsvärde} = 4, \quad \text{vänstergränsvärde} = 2, \quad \text{gränsvärde finns inte.}$$

$$15. \quad a = -2, \quad \text{gränsvärdet} = 3.$$

$$16. \quad \text{a. } \text{Ja, } f(1) = -4. \quad \text{b. } \text{Nej.}$$

$$19. \quad \text{a. } (\sqrt{5} + 4\sqrt{2})/9 \quad \text{b. } (2 - 2\sqrt{10})/9 \quad \text{c. } (-2 + 2\sqrt{10})/9 \quad \text{d. } (\sqrt{5} + 4\sqrt{2})/9$$

$$20. \quad \text{a. } 3/4$$

$$\text{b. } 2/3.$$

$$\text{c. } \ln 3$$

$$\text{d. } 0. \quad \text{e.}$$

$$1 \quad \text{f.}$$

$$e^2$$

1. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:
 - a. $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
 - b. $(\sin x + \cos x) \sin x$
 - c. $(1 + 2x)^9$

2. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan
 - a. $y = \frac{4x + 5}{2x + 3}$ i punkten $(-1, 1)$.
 - b. $y = (1 - x)^9(2x - 3)^8$ i punkten $(2, -1)$.
 - c. $y = \frac{(1 - x)^8}{(2x - 3)^9}$ i punkten $(2, 1)$.

3. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:
 - a. $\frac{4x + 5}{2x + 3}$
 - b. $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
 - c. $(\sin x + \cos x) \sin x$
 - d. $2\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + 2x}$
 - e. $(1 + 2x)^9$
 - f. $\sin^9 x$

4. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $x^3 - xy + y^3 = 7$ i punkten $(2, 1)$.

5. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:
 - a. $\ln \sin(2x + 1)$
 - b. $\arctan \sqrt{2x - 1}$

6. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan
$$\sqrt{2x + y} + \sqrt{x + y^3} = 5$$
i punkten $(1, 2)$.

7. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:
 - a. $\frac{4x + 5}{2x + 3}$
 - d. $2\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + 2x}$
 - f. $\sin^9 x$

8. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan
 - a. $y = (1 - x)^9(2x - 3)^8$ i punkten $(2, -1)$.

9. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:
 - a. $\cos^2 \frac{1}{x}$.
 - b. $x^{\sin x}$.
 - c. $\ln \sqrt{\tan 2x}$.
 - d. $\operatorname{arccot} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

10. Beräkna derivatorna $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{d^2y}{dx^2}$ uttryckta i x och y då funktionen $y = y(x)$ definieras av:

a. $x^3y^3 + xy = 1.$ b. $\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 1.$

11. Det finns en punkt på kurvan

$$y = x + 2 + \frac{1}{5} \ln(x + 1) - \frac{1}{10} \ln(4x^2 + 1) - \frac{1}{10} \arctan 2x$$

där tangenten till kurvan bildar vinkeln $\frac{\pi}{4}$ med x -axel. Bestäm en ekvation för denna tangent.

12. Det finns en punkt på kurvan

$$y = 2 - x + \frac{4}{5} \ln(x + 1) + \frac{1}{10} \ln(4x^2 + 1) - \frac{2}{5} \arctan 2x$$

där normalen till kurvan bildar vinkeln $\frac{\pi}{4}$ med x -axel. Bestäm en ekvation för denna normal.

13. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\sin^9 2x$ b. $(x - x^2)e^{-x}$ c. $(2x + 1)^3(1 - x)^4$
d. $\ln \sin(2x + 1)$ e. $\arctan \sqrt{2x - 1}.$

14. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x + \sin 3x}{\ln(1 - 4x) + 5x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \sin 3x}{1 - e^{2x}}$
c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{3x}}{e^{-x} - 1}$ d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arctan 2x - 2 \ln(1 + 3x)}{1 - \cos 4x}$

15. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \ln(3 + 4x^5) - 5 \ln(4 + 3x^2))$ (Skriv på formen $\ln(\text{bråk}).$)
b. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$ (Använd $a^b = e^{b \ln a}.$)

16. Bestäm eventuella asymptoter till kurvan

$$y = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1} - x^2.$$

Svar:

1. a. $\frac{1}{1 + \sin 2x}$ b. $\sin 2x + \cos 2x$ c. $18 (1 + 2x)^8$
2. a. Tangent: $2x - y + 3 = 0.$ Normal: $x + 2y = 1.$
 b. Tangent: $25x + y = 49.$ Normal: $x - 25y = 27.$
 c. Tangent: $10x + y = 21.$ Normal: $x - 10y + 8 = 0.$

3. a. $\frac{2}{(2x+3)^2}$ b. $\frac{1}{1+\sin 2x}$ c. $\sin 2x + \cos 2x$
d. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ e. $18(1+2x)^8$ f. $9 \cos x \sin^8 x$
4. Tangent: $11x + y = 23$. Normal: $x - 11y + 9 = 0$.
5. a. $2 \cot(2x + 1)$ b. $\frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$
6. b. Tangent: $8x + 27y = 62$. Normal: $27x - 8y = 11$.
7. a. $\frac{2}{(2x+3)^2}$ d. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ f. $9 \cos x \sin^8 x$
8. a. Tangent: $25x + y = 49$. Normal: $x - 25y = 27$.
9. a. $\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$ b. $x^{\sin x - 1}(x \cos x \ln x + \sin x)$
c. $\frac{2}{\sin 4x}$ d. $\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$
10. a. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$ b. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \frac{d^2y}{dx^2} = 0$
11. $y = x + 2$.
12. $y = x + 2$.
13. a. $18 \cos 2x \sin^8 2x$ b. $(1 - 3x + x^2)e^{-x}$ c. $2(7x - 1)(2x + 1)^2(x - 1)^3$
d. $2 \cot(2x + 1)$ e. $\frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$
14. a. 5. b. 2.
c. 3. d. 9/8.
15. a. $4 \ln 2 - 5 \ln 3$. b. e^2 .
16. $y = 3$.

1. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
 - a. $f(x) = 4 \arctan x + 5 \operatorname{arccot} 2x$
 - b. $f(x) = 2 \ln(1 + (2x - 2)^2) + \operatorname{arccot}(2x - 2) + 2x$
2. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen $f(x) = 6 \ln(1 + 2x) - \ln(1 + 4x^2) - 6 \arctan 2x$.
3. Bestäm största och minsta värdena till följande funktioner:
 - a. $2x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq 1$.
 - b. $x + 2 \ln(-4 + 6x - x^2)$, $1 \leq x \leq 5$.
4. Visa följande olikheter:
 - a. $2 \ln x \leq x^2 - 1$, för alla $x \geq 0$.
 - b. $\ln(1 + 2x) \geq \frac{3x}{x + 2}$, för alla $x \geq 0$.
 - c. $\sin x + \cos x \leq 1 + 2x$, för alla $x \geq 0$.
5. Visa att funktionen f är inverterbar
 - a. $f(x) = 3x - \arctan 2x$.
6. Bestäm i förekommande fall det största och det minsta värdet till följande funktioner:
 - a. $f(x) = \ln(x + 1) - 2 \arctan \sqrt{x}$.
 - b. $f(x) = \frac{-2x}{4x^2 + 1} + \arctan 2x$.
7. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
 - a. $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$.
 - b. $f(x) = x + \arctan(1 - 2x)$.
 - c. $f(x) = x + \ln(2 - 2x + x^2)$.
 - d. $f(x) = 4x + 5 \ln(2 - 2x + x^2)$.
8. Ekvationen $x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$ definierar en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 1$. Bestäm derivatan $y'(x)$ uttryckt i x och y . Visa att $x = 1$ är en lokal extrempunkt till y och bestäm dess karaktär.
9. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen $f(x) = 6 \ln(1 + 2x) - \ln(1 + 4x^2) - 6 \arctan 2x$.
10. Bestäm största och minsta värdena till följande funktioner:
 - a. $4\sqrt{1 - x^2} + 3x$.
 - b. $x^2 - 4|x - 1| - 2x$, $0 \leq x \leq 4$.
11. Visa olikheten $e^{-x} \geq 1 - x$, för alla x .
12. Visa olikheten $\ln(1 + 2x) + \ln(1 + 3x) \leq 5x$, för alla $x \geq 0$.

13. Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionen
- a. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$. b. $f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x$.
14. Hur stor kan produkten ab av två tal a och b maximalt vara om $a^4 + 2b^2 = 48$?
15. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x) = (x+1)(a - \arctan x)$ har en kritisk punkt för $x = 0$. Avgör också om det är ett lokalt maximum eller minimum eller en terrasspunkt.
16. För vilka värden på konstanten a är funktionen $f(x) = ax - 3 \arctan 2x$ inverterbar?
17. Hur stor kan lutningen hos tangenten till kurvan $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ vara maximalt?
18. Visa att $x^4 + 32|x-1| \geq 1$ för alla x .
19. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
- a. $f(x) = \sin 3x$. b. $f(x) = \ln(1+2x)$.
c. $f(x) = \ln(1+2x) \sin 3x$. (Använd 1a och b.)
20. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
- b. $f(x) = \ln(3+2x)$ kring $x = 0$
c. $f(x) = \ln(1+2x)$ kring $x = 1$ (Använd 2b.)
21. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
- a. $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ kring $x = 0$ b. $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ kring $x = -1$
22. Betrakta funktionen $f(x) = 4e^{-x} - e^{2x} - 3 \sin 2x + 12 \sin x$.
- a. Bestäm Taylorpolynomet av fjärde graden till f kring punkten $x = 0$.
b. Använd resultatet i a för att visa att $f(x) < 3$ om x ligger tillräckligt nära 0.
23. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.
- a. $f(x) = \sqrt{1+2x}$. b. $f(x) = e^{-3x} \sqrt{1+2x}$.

Svar:

1. a. Lok max i -1 , lok min i 1 .
b. Lok max i -1 , lok min i 1
2. Lok max i 0 , lok min i 1 .

3. a. $\sqrt{3}/2 + \pi/2$ och 0. b. $4 + 4 \ln 2$ och 1.
6. a. $\min = \ln 2 - \pi/2$, max saknas. b. Max och min saknas.
7. a. Lok min i 1 och 3, lok max i 2. b. Lok max i 0, lok min i 1.
c. Finns inga. d. Lok max i -1 , lok min i $1/2$.
8. $y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$, $x = 1$ är en lokal minimipunkt.
9. Lok max i 0, lok min i 1.
10. a. 5 och -3 . b. -1 och -5 .
13. a. $D_f = [1, 3]$, $V_f = [\sqrt{2}, 2]$.
b. $D_f = [-1, 1]$, $V_f = [\pi/2, \sqrt{2} - \pi/2]$.
14. 8.
15. $a = 1$; lokalt maximum.
16. $a \geq 6$ eller $a \leq 0$.
17. 1.
19. a. $3x - 9x^3/2 + O(x^4)$. b. $2x - 2x^2 + 8x^3/3 + O(x^4)$.
c. $6x^2 - 6x^3 + O(x^4)$.
20. a. $\ln(3) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + O(x^3)$ b. $\ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$
21. a. $1 - 2x + 4x^2 + O(x^3)$ b. $-1 - 2(x+1) - 4(x+1)^2 + O((x+1)^3)$
22. $3 - \frac{1}{2}x^4$.
23. a. $1 + x - x^2/2 + x^3/2 + O(x^4)$. b. $1 - 2x + x^2 + 2x^3 + O(x^4)$.

- Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
 - $y'' - y' - 2y = 2x + 1$.
 - $y'' + 6y' + 9y = 27x$.
- Bestäm den lösning till $y'' - y' - 2y = 0$ som uppfyller $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
- Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
 - $y'' + y' - 2y = 4xe^{-x}$.
 - $y'' + y' - 2y = 20 \cos 2x e^{-x}$.
 - $y'' + y = 2 \cos x$.
 - $y'' - 2y' = 4x$.
 - $y'' + 4y = 24 \sin 4x$.
 - $y'' - 4y' + 13y = 40 \cos x$.
- Bestäm den lösning till $y'' - y' - 2y = 2x + 1$ som uppfyller $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

5. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x}} dx$

b. $\int_0^1 (1-2x)^{100} dx$

c. $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

d. $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

e. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$

f. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1} dx$

6. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan $y = x - \sqrt{x}$ och x -axeln.

7. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx$

b. $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+4x^2} dx$

c. $\int_0^4 \frac{x}{9+x^2} dx$

8. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{2-x}$ och $y = x\sqrt{2-x}$.

9. Beräkna följande integraler:

a. $\int_{-1}^1 (1-2x)e^{-2x} dx$

b. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$

c. $\int_0^1 \ln(x+1) dx$

d. $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$

10. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \frac{5}{9-x^2}$ och $y = \frac{8}{4+x^2}$.

11. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^1 (2x+1) \arctan \sqrt{x} \, dx$

b. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \sin^3 x} \, dx$

c. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x} \, dx$

12. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) \, dx$

b. $\int_0^1 x \arctan x \, dx$

13. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av x -axeln och kurvan $y = (x-3)\sqrt{4-x}$.

14. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

a. $y'' - y' = 2x + 1.$

b. $y'' - y' - 2y = 4e^{3x}.$

c. $y'' - y' - 2y = 20 \cos 2x.$

15. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

a. $y'' + y' - 2y = 40 \sin x \cos x.$ (Förenkla högerledet: $2 \sin x \cos x = \sin 2x$.)

b. $y'' - 3y' + 2y = 4x + 10 \cos x.$

c. $y''' + 3y'' - y' - 3y = 9x.$

d. $y''' - y'' + y' - y = e^{-x}$

16. Beräkna följande integraler:

a. $\int_4^5 \frac{3x-7}{x^2-5x+6} \, dx$

b. $\int_4^5 \frac{3x^2-7x-4}{(x-3)(x-2)^2} \, dx$

c. $\int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2} \, dx$

d. $\int_5^6 \frac{x^2-5x+10}{x^2-6x+8} \, dx$

e. $\int_0^1 \frac{x^2-10x+11}{(x-3)(x^2+1)} \, dx$

f. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+16 \sin^2 x} \, dx$

g. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{1+\cos^2 x} \, dx$

Svar:

1. a. $y = -x + Ae^{-x} + Be^{2x}$

b. $y = e^{-3x}(A + Bx) + 3x - 2$

2. $y = 1/3e^{-x} + 5/3e^{2x}$
3. a. $y = (1 - 2x)e^{-x} + Ae^x + Be^{-2x}$
 b. $y = (-\sin 2x - 3 \cos 2x)e^{-x} + Ae^x + Be^{-2x}$
 c. $y = x \sin x + A \sin x + B \cos x$
 d. $y = -x - x^2 + A + Be^{2x}$
 e. $y = -2 \sin 4x + A \sin 2x + B \cos 2x$
 f. $y = 3 \cos x - \sin x + Ae^{2x} \sin 3x + Be^{2x} \cos 3x$
4. $y = -x + 2e^{2x}$
5. a. 10/27. b. 1/101. c. 1/4. d. $\ln 3$.
 e. $\ln 3$. f. $\ln 2 + \pi/4$.
6. 1/6.
7. a. $\pi/8$ b. $\pi/8$ c. $\ln 5 - \ln 3$
8. 4/15.
9. a. $e^2 + e^{-2}$. b. 4π . c. $2 \ln 2 - 1$.
 d. 1/4 g. -2 h. $3 \ln 5 - 4 \ln 2$
10. $2\pi - (5 \ln 5)/3$.
11. a. $\pi/2 - 1/3$. b. $(\ln 5 - \ln 2)/2$. c. $1 + \ln 2 - \ln 3$.
12. a. $\ln 2 - 2 + \pi/2$ b. $\pi/4 - 1/2$
13. 4/15.
14. a. $y = -3x - x^2 + A + Be^x$ b. $y = e^{3x} + Ae^{-x} + Be^{2x}$
 c. $y = -\sin 2x - 3 \cos 2x + Ae^{-x} + Be^{2x}$
15. a. $y = -3 \sin 2x - \cos 2x + Ae^x + Be^{-2x}$
 b. $y = 3 + 2x + \cos x - 3 \sin x + Ae^x + Be^{2x}$
 c. $y = Ae^{-x} + Be^x + Ce^{-3x} - 3x + 1$
 d. $y = A \cos x + B \sin x + Ce^x - e^{-x}/4$
16. a. $\ln 6$. b. $1 + \ln 6$. c. $3 \ln 5 - 4 \ln 2$
 d. $1 + 2 \ln 3 - \ln 2$. e. $\ln 3 - \pi$. f. $\frac{1}{4} \arctan 4$
 g. $(\ln 3 - \ln 2)/2$.

2. Beräkna arean av det området som begränsas av

- kurvan $y = x\sqrt{1-x^2}$ och x -axeln.
- kurvan $y^2 = x^2 - x^3$.

3. Beräkna följande generaliserade integraler:

a. $\int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$ b. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)x^2} dx$

4. Beräkna arean av det oändliga området som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$.

5. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan $y^2 = x^2(1-x^2)$.

6. Beräkna volymen av den kropp som uppstår vid rotation av området

- mellan kurvan $y = \sqrt{1-x}$ och koordinataxlarna kring x -axeln.
- mellan kurvan $y = \sqrt{1-x}$ och koordinataxlarna kring y -axeln.

7. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan y -axeln och kurvorna $y = \cos x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/4$, roterar ett varv

- kring x -axeln.
- kring y -axeln.

8. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av

- x -axeln och kurvorna $y = \tan x$, $y = \cot x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.
- y -axeln och kurvorna $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.
- y -axeln och kurvorna $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

9. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då ytstycket mellan linjen $x = 1$ och kurvan $y^2 = 4x$ roterar ett varv kring linjen $y = 2$.

10. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av x -axeln och kurvan $y = (x-1)\sqrt{2x-x^2}$ roterar ett varv kring linjen $x = 1$.

11. Beräkna följande integraler:

a. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx$ b. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x} dx$

c. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx$ d. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$

12. Beräkna arean av det området som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{1 - 4x^2}$ och $y = \sqrt{1 - 2x}$.

13. Beräkna följande generaliserade integraler:

a.
$$\int_1^{\infty} \frac{1 + 5x^2}{(1 + x^2)x^2} dx$$

b.
$$\int_1^{\infty} \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 x^2} dx$$

14. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan x -axeln och kurvan $y = \pi/2 - \frac{\arcsin x}{x}$ roterar ett varv kring y -axeln.

15. Betrakta kurvan $x = 2(t + 1)^{3/2}$, $y = 2(4 - t)^{3/2}$.

a. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i den punkt som svarar mot $t = 3$.

b. Bestäm en ekvation för normalen till kurvan i den punkt som svarar mot $t = 3$.

c. Beräkna längden av kurvan då $2 \leq t \leq 4$.

16. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan

a. $x = t^2 + 2t + 2$, $y = t^3 + t$ i punkten $(5, 2)$.

b. $r = \sin v + \cos 2v$ i den punkt som svarar mot $v = \pi$ (polära koordinater).

17. Beräkna längden av kurvan

a. $x = 3 \cos t - 4 \sin t$, $y = 3 \sin t + 4 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b. $r = 3 \sin v + 4 \cos v$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, (polära koordinater).

c. $y = \ln(1 - x) + \ln(1 + x)$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

18. Bestäm ekvationer för tangenten och normalen till kurvan

$$x = (2 + \cos t + \sin t)\cos t, \quad y = (2 + \cos t + \sin t)\sin t$$

i den punkt som svarar mot $t = \frac{\pi}{2}$.

19. Beräkna längden av kurvan

a. $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 1$.

b. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c. $y = \frac{1}{3}(x - 4)\sqrt{x - 1}$, $2 \leq x \leq 10$.

d. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $2 \leq x \leq 3$.

20. a. Det finns en punkt på kurvan $x = t^3 - 3t + 1$, $y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{4}$ där tangenten till kurvan bildar vinkeln $\frac{\pi}{3}$ med x -axel. Bestäm en ekvation för denna tangent.

- b. Det finns en punkt på kurvan $x = t^3 - 3t + 1$, $y = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}t^4$ där normalen till kurvan bildar vinkeln $\frac{\pi}{6}$ med x -axel. Bestäm en ekvation för denna normal.

Svar:

2. a. $2/3$. b. $8/15$.
3. a. $\pi/4$. b. $1 - \pi/4$.
4. 2.
5. $4/3$.
6. a. $\pi/2$. b. $8\pi/15$.
7. a. $\pi/2$. b. $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2} - 2\pi$
8. a. $\ln 2$. b. $\ln 2$. c. $2 - \sqrt{2}$
9. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.
10. $\pi^2/4$.
11. a. $(\ln 3)/4$. b. $\ln 3 - \ln 2$.
c. $\pi\sqrt{3}/9$. d. $-\ln(\sqrt{2} - 1)$
12. $\pi/8 - 1/3$.
13. a. $1 + \pi$. b. $1/2$.
14. $2\pi - \pi^2/2$.
15. a. $x + 2y = 20$ b. $2x - y = 30$ c. $2\sqrt{45}$
16. a. $x + y = 7, x - y = 3$ b. $x + y = -1, x - y = -1$.
17. a. 10π . b. $5\pi/2$. c. $2\ln 3 - 1$.
18. Tangent: $3y - x = 9$. Normal: $3x + y = 3$.
19. a. $2e - 2$. b. 8. c. $32/3$. d. $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$.
20. a. $\sqrt{3}x - y = \sqrt{3} - 2$. b. $x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3} + 1$