Om exponentiala och logaritmiska funktioner

1. Talet e och exponentialfunktion. Det talet e som ges av gränsvärdet

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

är ett av mest viktigaste tal inom hela matematiken. Existens av gränsvärdet kan bevisas (man studerar först följd $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ för positiva heltal n och bevisar dess konvergens då $n \to \infty$ och sedan kommer till reela x). Numeriskt, talet e är

$$e = 2.718281828459045...$$

(den första 1828 är födelseår av en stor rysk författare L. Tolstoi medan den andra 1828 är födelseår av den andra stor rysk författare F. Dostoevskii).

Funktionen

$$\exp(x) = e^x$$

kallas exponentialfunktion och den är också en av mest viktigaste funktioner inom hela matemaiken. Dess egenskap

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$$

visar att funktionen utgör ett samband mellan två aritmetiska operationer: addition och multiplicering.

2. Logaritmer. Operation av upphöjning i potens har två naturliga inversa operationer. Om vi har ett samband

$$a^b = c$$

med bekanta b och c och vi vill hitta obekant a, då tillämpar vi operation "rot av ordning b":

$$a = \sqrt[b]{c}.$$

Men samma samband med bekanta a och c och obekant exponent b leder till helt annan operation som kallas logaritm:

Definition: Det tal b som uppfyller för givna positiva tal a och c ekvationen $a^b = c$ kallas *logaritm av c med bas a* och betecknas som

$$b = \log_a c.$$

Faktiskt, funktionen $x = \log_a y$ är inversfunktion till funktionen $y = a^x$. Här kommer några mest viktigaste egenskaper hos den logaritmiska funktionen:

$$a^{\log_a b} = b; \quad \log_a(a^c) = c;$$
$$\log_a 1 = 0, \quad \text{eftersom } a^0 = 1;$$
$$\log_a(b\cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad \text{eftersom } a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b}\cdot a^{\log_a c} = bc;$$
$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, \quad \text{det bevisas analogt;}$$
$$\log_a(b^c) = c\cdot\log_a b, \quad \text{eftersom } a^{c\cdot\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^c = b^c$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \quad \text{Försök att bevisa det själva!}$$

De två speciella bas a uppstår oftast i tillämpningarna: $a = 2$ (särdeles i datatekniken!) och $a = e$. Den logaritm med bas e kallas *den naturliga logaritmen* och betecknas som

$$\ln x = \log_e x.$$

3. Derivator av logaritmiska och exponentiala funktioner. Vi börjar med att omskriva gränsvärdet som definierar talet e:

$$e = \lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t}$$

(faktiskt, vi bytte variabel: $t = \dfrac{1}{x}$). Om man tar naturlig logaritm av både leden av den sista likheten, får man

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Det är ett viktigt gränsvärde liksom $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, ett av "underbara gränsvärden". Nu kan man beräkna derivata av naturlig logaritm:

$$\frac{d}{dx} (\ln x)\Big|_{x=a} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(a+t) - \ln(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{a+t}{a}\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{t}{a}\right)}{a \cdot \dfrac{t}{a}} = \frac{1}{a}.$$

Alltså

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

För godtycklig bas man har

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

För att derivera den exponentiala funktionen, använder vi regeln för derivering inversfunktioner: om $y = \exp(x)$ då $x = \ln y$ och

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy} \ln y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = \exp(x).$$

Alltså

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Det är en underbar egenskap hos den exponentiella funktionen som även karakteriserar den. För allmänna exponentialfuktionen a^x det gäller

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$