Institutionen för matematik, KTH
Mattias Dahl

5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1, för TIMEH2
Tentamen, tisdag 29 mars 2005 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är formelsamlingen Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp. minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju kontrollskrivningar/hemuppgifter givits, godkänt på någon av dessa räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen.

Skrivning	KS1	HU1	KS2	HU2	KS3	HU3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	5	6	7

DEL A

(3p) **1.** Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^{-2} - 3x^2}{4x^2 - 5x^{-2}}.$$

Lösning. *Detta är ett gränsvärde av typen $\frac{\infty}{\infty}$, vilket vi kan åtgärda genom att förlänga med x^2:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^{-2} - 3x^2}{4x^2 - 5x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 3x^4}{4x^4 - 5} = \frac{2-0}{0-5} = -\frac{2}{5}$$

(3p) **2.** Bestäm de punkter på kurvan

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 5$$

där tangentlinjen är horisontell.

Lösning. *Tangentlinjen är horisontell i punkter där derivatan av y med avseende på x är noll, vi deriverar kurvans ekvation och sätter $y' = dy/dx = 0$:*

$$\begin{aligned} 0 &= (5)' \\ &= (x^2 + 2xy + 2y^2)' \\ &= 2x + 2xy' + 2y + 4yy' \\ &= 2(x+y). \end{aligned}$$

Tangentlinjen är alltså horisontell i punkter där $x + y = 0$, insatt i kurvans ekvation ger detta $x = \pm\sqrt{5}$, eller punkterna $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ och $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

(3p) **3.** Antar funktionen

$$f(x) = \arctan 3x - \arctan x$$

värdet 1/2?

Lösning. *För funktionen $f(x)$ gäller*

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Lokala extremvärden finns i punkter där $f'(x) = 0$, detta ger $x = \pm 1/\sqrt{3}$,

$$f(\pm 1/\sqrt{3}) = \pm\pi/6.$$

Eftersom $f(x)$ är en kontinuerlig funktion med $f(0) = 0 < 1/2$ och $f(1/\sqrt{3}) = \pi/6 > 1/2$, så måste $f(x) = 1/2$ för något x mellan 0 och $1/\sqrt{3}$.

(3p) **4.** Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Lösning. *Derivatan ges av*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1-\cos^2 x}\cdot(-\sin x) - \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\cos x \\ &= \sqrt{\sin^2 x}\cdot(-\sin x) - \sqrt{\cos^2 x}\cdot\cos x \\ &= |\sin x|\cdot(-\sin x) - |\cos x|\cdot\cos x \\ &= -\sin^2 x - \cos^2 x \\ &= -1. \end{aligned}$$

(3p) **5.** Området mellan x-axeln och kurvan $y = xe^{-x}$, $0 \le x \le 4$, roterar ett varv kring x-axeln. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår.

Lösning. *Volymen ges av integralen (som vi beräknar med två partialintegreringar eller med hjälp av Beta, 7.4, formel 321)*

$$\begin{aligned} \int_0^4 \pi y^2\,dx &= \pi\int_0^4 x^2 e^{-2x}\,dx \\ &= \pi\left[-\frac{1}{8}e^{-2x}(4x^2+4x+2)\right]_0^4 \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1-41e^{-8}\right). \end{aligned}$$

(3p) **6.** Bestäm alla funktioner $y = f(x)$ som uppfyller differentialekvationen

$$y' = \sqrt{y}(x^3 - 2x + 1).$$

Lösning. *Detta är en separabel ekvation, vi samlar x och y på var sin sida,*

$$y'y^{-1/2} = x^3 - 2x + 1,$$

och integrerar:

$$2y^{1/2} = \frac{x^4}{4} - x^2 + x + C,$$

där C är någon konstant. Detta ger

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4} - x^2 + x + C\right)^2.$$

(3p) **7.** Bestäm koefficienten framför x^5 i Taylorutvecklingen av

$$f(x) = \arccos x \cos x$$

vid $x = 0$.

Lösning. *I Beta (avsnitt 8.6) hittar vi Taylorutvecklingarna*

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + O(x^7),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6).$$

Multiplicerar vi dessa får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= \arccos x \cos x \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + O(x^7)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\right). \end{aligned}$$

I denna produkt får vi följande termer med x^5:

$$(-x)\cdot\left(\frac{1}{24}x^4\right) + \left(-\frac{1}{6}x^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + (1)\cdot\left(-\frac{3}{40}x^5\right) = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{3}{40}\right)x^5$$

Koefficienten framför x^5 är alltså $-\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = -\frac{1}{30}$.

(3p) **8.** Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{3x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

Lösning. *Vi gör en partialbråksuppdelning*

$$\frac{3x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{-1}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+4}$$

och integrerar,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{3x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{-1}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+4}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-\arctan(x) + 2\arctan(x/2)\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(-\arctan(t) + 2\arctan(t/2)\right) \\ &= \pi/2. \end{aligned}$$

DEL B

(5p) **9.** Ett rep av längd 10 m används för att göra en cirkel och en kvadrat. Vilken är den största resp. minsta sammanlagda area dessa kan ha?

Lösning. *Om vi använder x m av repet för att göra cirkeln får vi en cirkel med radie $x/2\pi$ och en kvadrat med sida $(10-x)/4$. Den sammanlagda arean av dessa är*

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{1}{16}(10-x)^2.$$

Vi ska hitta max/min för $A(x)$ då $0 \le x \le 10$. I ändpunkterna på intervallet har vi

$$A(0) = \frac{25}{4}, \quad A(10) = \frac{25}{\pi}.$$

Funktionen $A(x)$ är deriverbar för alla x så eventuella max/min i det inre av intervallet finns i punkter där $A'(x) = 0$. Detta ger

$$0 = \frac{1}{2\pi}x - \frac{1}{8}(10-x) = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right)x - \frac{10}{8}$$

eller $x = \frac{10\pi}{4+\pi}$ (vilket är ett tal mellan 0 och 10.) Vi har

$$A\left(\frac{10\pi}{4+\pi}\right) = \frac{25}{4+\pi}.$$

Den största arean ges av $x = 0$ och är $\frac{25}{4}$ m^2 (om man godtar en kvadrat med sidlängd 0 m, annars finns ingen största area.) Den minsta arean fås vid $x = \frac{10\pi}{4+\pi}$ och är $\frac{25}{4+\pi}$.

(5p) **10.** Visa att

$$\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

för alla $x > 0$.

Lösning. *Detta är det samma som att visa att*

$$f(x) = \arctan(1/x) + \arctan(x)$$

är konstant lika med $\frac{\pi}{2}$. Eftersom

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1/x)^2+1} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

så är $f(x)$ konstant. Eftersom

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

så är $f(x)$ konstant lika med $\frac{\pi}{2}$.

(5p) **11.** Visa att funktionen

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1,$$

är inverterbar. Vilken är definitionsmängden för inversfunktionen $f^{-1}(x)$? Beräkna inversfunktionens derivata i punkten $\ln(\sqrt{2}+1)$.

Lösning. *Eftersom*

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$$

för alla $x \geq 1$ så är $f(x)$ strikt växande och alltså inverterbar. Definitionsmängden för f^{-1} är lika med värdemängden för f. Vi har $f(1) = 0$, f strikt växande, $lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, så värdemängden för f är alla $x \geq 0$. För inversens derivata gäller

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Vi har $f(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}+1)$ *så* $f^{-1}(\ln(\sqrt{2}+1)) = \sqrt{2}$ *och*

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(\ln(\sqrt{2}+1)) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln(\sqrt{2}+1)))} \\ &= \frac{1}{f'(\sqrt{2})} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

(Uppgiften kan också lösas genom att beräkna f *från* f^{-1}*, vilket ger* $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$*,* $x \geq 0$*.)*

(5p) **12.** En kil tillverkas av en cylindrisk trädstam med radie 10 cm på följande sätt. Först kapas stammen med ett snitt med 45° vinkel mot centralaxeln. Därefter kapas en kil bestående av de översta h cm ($0 \leq h \leq 20$) med ett snitt vinkelrätt mot centralaxeln. Beräkna volymen av kilen.

Lösning. *I ett lämpligt valt koordinatsystem ligger kilen över området*

$$x^2 + y^2 \leq 10^2, \quad x \geq 10 - h.$$

Ett plan vinkelrät mot x*-axeln skär kilen i en en rektangel med sidorna* $2\sqrt{10^2 - x^2}$ *och* $x + h - 10$*. Volymen av kilen är lika med integralen av arean av dessa trianglar, eller*

$$V = \int_{10-h}^{10} 2\sqrt{10^2 - x^2}(x + h - 10)\,dx.$$

Vi beräknar denna integral med hjälp av primitiva funktioner 138, 142 avsnitt 7.4 i Beta:

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{10-h}^{10} x\sqrt{10^2 - x^2}\,dx + 2(h-10)\int_{10-h}^{10} \sqrt{10^2 - x^2}\,dx \\ &= 2\left[-\frac{1}{3}\left(10^2 - x^2\right)^{3/2}\right]_{10-h}^{10} + 2(h-10)\left[\frac{1}{2}x\sqrt{10^2 - x^2} + \frac{10^2}{2}\arcsin\frac{x}{10}\right]_{10-h}^{10} \\ &= 100(h-10)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{10-h}{10}\right) + \sqrt{20h - h^2}\left(100 - \frac{20}{3}h + \frac{5}{3}h^2\right). \end{aligned}$$