Institutionen för Matematik
KTH
Mattias Dahl

Kontrollskrivning 4, Differential- och Integralkalkyl, 5B1104

Tisdag 1/3 2005 kl. 10.15–11.00

Version B

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, och ordentligt skrivna. Tillåtna hjälpmedel är formelsamlingen Beta. För godkänt krävs minst tre poäng.

1. Låt $f(x) = x^{3/2}$, $x \geq 0$.

   a) Bestäm linjäriseringen $L(x)$ (=Taylorpolynomet $P_1(x)$ av grad 1) av $f(x)$ vid $x = 16$.

   b) Ungefär hur stort blir felet om vi approximerar $f(17) = 17^{3/2}$ med $L(17)$?

   (2p)

a) $L(x) = 64 + 6(x - 16)$,
b) Felet ges av $f''(X)\frac{(17-16)^2}{2}$ där $16 \leq X \leq 17$, dvs. det är mindre än $\frac{3}{8\sqrt{16}} = \frac{3}{32} < \frac{1}{10}$.

2. *a)* Bestäm Taylorutvecklingen till ordning 2 vid $x = 0$ för

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+2x}.$$

   b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x^2)} \left(\frac{e^{2x}}{1+2x} - 1 \right).$$

   (3p)

a) Vi vet att $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ så $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + O(x^3)$. Dessutom är $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + O(t^3)$ så $\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 + O(x^3)$. Tillsammans ger detta

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} \cdot \frac{1}{1+2x} \\ &= \big(1 + 2x + 2x^2 + O(x^3)\big) \cdot \big(1 - 2x + 4x^2 + O(x^3)\big) \\ &= 1 + 2x^2 + O(x^3). \end{aligned}$$

b) Gränsvärdet är lika med 2.