KTH, Matematiska institutionen, TK 040929

5B 1106, Diff- och int I, Envariabel, för F1.

Läsanvisningar till
R.A. Adams, Calculus, a Complete Course, 5th ed.

Kursens omfattning: kapitel P, 1.1-1.4, 2.1-2.6, 2.8-2.9, 3.1, 3.3-3.4, 3.5 till def. 13, 3.6, 3.7, 4.2, 4.3 (endast andraderivatetestet), 4.5, 4.7-4.8, 9.8 fram till Th. 23, 4.9, 5, 6.1, 6.2, 6.3, 6.5, 7.1 och 7.3, 9.1-9.2, 9.3 till s. 542, 9.4 till s 548, 9.5 t.o.m. s. 555, samt Th. 19.

Kap. P. Detta är väsentligen ett repetitionskapitel i vilket behandlas grundläggande material som förutsätts under kursen.

Man bör ha *funktionsbegreppet*, sid. 26, helt klart för sig. Vidare bör man ha kunskap om linjer, cirklar, parabler mm

Några andra viktiga begrepp i samband med funktioner är: *definitionsmängd* (domain of definition) och *värdemängd* (range) s. 26, samt sammansatta funktioner, s. 36. (Inversa funktioner, behandlas först i kap 3.1, s. 175-).

Den som saknar elementär kunskap om komplexa tal kan konsultera (delar av) Appendix I, sid A1-A11 i slutet av boken.

1.1 Detta avsnitt är av orienterande och motiverande karaktär. Läs Ex 1-3.

1.2-1.3 Gränsvärdesbegreppet är fundamentalt i kursen. Du bör förstå den formella definitionen (som har frpassats till avsnitt 1.5, sid sid 90), i ljuset av den informella på sid 63. Den idé som ligger bakom är inte svår.

Vänster- och högergränsvärden definieras och förklaras på liknande sätt, men man betraktar bara punkter till höger resp vänster om den givna punkten (s. 66). Observera Sats 1 (s. 66): en funktion har gränsvärde i en punkt precis då dess vänster- och högergränsvärden i punkten existerar och är lika.

Vid beräkning av gränsvärden används gränsvärdeslagarna, s. 67. Gränsvärde i $\pm\infty$ sid. 72. Läs exempel 1.2.1, 3-9; 1.3.1-10.

1.4 Då man infört gränsvärden är kontinuitet nästa steg. Att en funktion är kontinuerlig betyder att den har gränsvärden överallt och att dessa sammanfaller med funktionsvärdena.

Definition 5, 6, 7, 8, och Sats 5, sid 79-80.

"De vanliga funktionerna" är kontinuerliga. Se s. 81, vre delen. Vidare visar Sats 6 och 7, s 81, hur man bildar nya kontinuerliga funktioner från givna. Sats 6 är (bortsett från punkt 5.) egentligen bara en variant av gränsvärdeslagarna. Sats 7 är lite annorlunda. Tänk igenom varför den gäller.

Läs exempel 1-6.

Sats 8 (sid 83) är mycket viktig. Den är grunden i optimeringsproblem (max och min). Man bör förstå att satsen inte är sann, och varför, om man ändrar någon av förutsättningarna; se fig. 1.24-27.

Sats 9, "Satsen om mellanliggande värden", används i tillämpningar för att finna nollställen, eller, allmännare, rötter till ekvationer. Den frklaras i fig. 1.29.

Läs exempel 9-11.

(1.5) Läsning för dem som vill veta mer om gränsvärden och kontinuitet. (Se också Appendix III.)

Kap 2. Derivatan. 2.1 I detta avsnitt förbereds derivatans införande genom en diskussion av lutning (slope) och tangentlinjer till kurvor $y = f(x)$. Det mesta bör vara bekant från gymnasiet, men, notera formeln för normalens lutning, sid. 101.

Läs exempel 1-7.

2.2 Definition av derivatan, s. 103. Ni bör i enkla exempel kunna beräkna derivator utgående från definitionen.

Derivata av potenser (power rule), s. 104. (Den visas för heltal i avsnitt 2.3 och för rationella tal i 2.9. Det generella fallet kräver logaritmer (kap. 3).)

Observera Leibniz' beteckningar, sid 107. De gör många formler enklare och mer intuitiva.

Läs exempel 1-5.

2.3 Sats 1 säger att deriverbarhet medför kontiniutet. Omvändningen är inte sann. Absolutbeloppet $|x|$ definierar en funktion som är kontinuerlig överallt, men inte kan deriveras i $x = 0$.

Deriveringsreglerna i Sats 2, 3, 5 måste man behärska; det finns inget utrymme för att göra fel här. Deriveringsreglerna skall "sitta i ryggmärgen".

Läs exempel 1-10.

2.4 Kedjeregeln, Sats 6, s. 121, är en hörnsten i differentialkalkylen. Den är lättast att komma ihåg med Leibniz' beteckningar (mitt på sidan).
Läs exempel 1-4.

2.5 Med hjälp av standardgränsvärdet (Sats 8, sid. 124)

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1,$$

och en trigonometrisk identitet (Ex. 1), kan man härleda derivatan till sinusfunktionen. Trigonometriska formler ger, tillsammans med deriveringsreglerna, uttryck för derivatorna till cosinus- och tangensfunktionerna, som man också skall kunna. Derivatan av t ex cotangens härleds lämpligen direkt, och vid behov. Observera att derivatan av tangens kan skrivas

$$\big(\tan x\big)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Det sista uttrycket är att föredra i samband med arcustangensfunktionen, som införs i avsnitt 3.5.

Anm. I engelskspråkig litteratur används ofta sekantfunktionerna $\sec x$, osv. Vi kommer inte att göra detta. Det räcker med funktionerna sin, cos, tan och cot.

Läs exempel 1-6.

2.6 Medelvärdessatsen (Sats 11, s. 133) är mycket viktig. Satsens geometriska betydelse framgår av figur 2.25 (s. 133). Figur 2.26 på samma sida visar att man inte kan ändra på någon av satsens förutsättningar.

Med hjälp av medelvärdessatsen kan man dra slutsatser om en funktions avtagande/växande om man vet derivatans tecken i ett intervall. Det viktigaste ur tillämpningssynpunkt är just detta, formulerat i Sats 12, s. 135. Begreppen avtagande/växande etc. införs i def. 5, s. 135.

Åter till medelvärdessatsen. Det är lätt att övertyga sig själv om att satsen gäller i det fall då funktionen är noll i intervallets ändpunkter (Rolles sats, sid 136, tyvärr utan figur). Man bör ändå notera, att man behöver satsen om största och minsta värde (max/min Theorem 8, s. 82). Från Rolles sats får man medelvärdessatsen genom ett slags variabelbyte; se fig. 2.30, s 138.

Läs exempel 1-5.

2.8 Högre ordningens derivator införs på naturligt sätt. Tolkning och tillämpningar följer i senare avsnitt.

2.9 Implicita funktioner: läs exempel 1, 2, 5, 6.

3.1 Inverterbara (1-1, one-to-one) funktioner, def. 1. Invers funktion, def. 2. Figurerna 3.3 och 3.4 visar hur man får fram inversen genom att spegla funktionen i linjen $y = x$.

Inversens derivata, mitt på sid. 180.

Läs exempel 1, 2, 4.

(3.2) Som i gymnasiet? Repetera gärna avsnittet.

3.3 Här införs $\ln x$ som den primitiva funktion till $1/x$ som tar värdet 0 för $x = 1$. (Egentligen behöver man Integralkalkylens fundamentalsats, avsnitt 5.5, här.) Från denna definition följer sedan logaritmlagarna (Sats 2) direkt. Exponentialfunktionen införs som invers till $\ln x$ och exponentiallagarna (Sats 3) följer av logaritmlagarna.

Man visar sedan att med $e = \exp 1$ är $\exp x = e^x$ (för rationella x).

Läs exempel 1, 2, 4.

3.4 Exponentiell och logaritmisk tillväxt: Sats 5, och dess sammanfattning i rutan på sid. 197. e^x som gränsvärde, sid. 201.

3.5 Sinus och andra trigonometriska funktioner är periodiska och därmed inte inverterbara: alla värden antas ju oändligt många gånger. Genom att betrakta dem på lämpliga delintervall, kan man invertera. På så sätt får man arcusfunktionerna $\arcsin x$, def. 9, fig 3.18; $\arctan x$, def. 11, fig. 3.22, samt $\arccos x$, def. 12, fig. 3.25(a). (Inverser till sekantfunktionerna, s. 208-209, ingår inte.)

Derivator av $\arcsin x$, sid 207; $\arctan x$, sid 209.
Läs exempel 1, 3, 5, 7, 9.

3.6 Man kan införa hyperboliska funktioner som en direkt motsvarighet till sinus och cosinus. Deras roll på som koordinater på enhetscirkelncirkeln motsvaras av att de hyperboliska sinus och cosinus kan användas som koordonater på hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$.

3.7 Karakteristiska ekvationen (**), sid. 219. Beroende av hur de karakteristiska rötterna ser ut, uppstår tre olika fall (sid 220-221). De kan beskrivas som (I) skilda reella rötter, (II) sammanfallande rella rötter, samt (III) rötter med imaginärdel $\neq 0$.
Läs exempel 1-5.

Den allmänna lösningen till en inhomogen ekvation är $y_h + y_p$, där y_p är en godtycklig (vilken som helst) partikulärlösning, och där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation. (Högst upp på sid 226.)

Lämplig ansats för partikulärlösningar får man gissa. Vid resonans måste man modifiera den naturliga ansatsen för partikulärlösning.
Läs exempel 7 samt exempel 8 om resonans.

4.2 Extremvärden: def. 1 (globala = absoluta), def. 2 (lokala). Sats 1, sid

240, är max/min-satsen från kap 1.4.). Sats 2, sid. 241, är mycket viktig. Den ger en metod för att finna största och minsta värden till en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$.
Läs exempel 1, 2, 3, 5 och 6.

4.3 I detta avsnitt ingår bara andraderivatetestet, Sats 6, sid 250. Läs ex 5.

4.5 I avsnittet behandlas "ostrukturerade" max/min-problem. Man måste själv formulera problemen matematiskt. Instruktivt avsnitt, trots den med övertydlighet utstakade problemlösningsmetoden på sid 264-265.
Läs exempel 1-5.

4.7 Formeln för linjär approximation (dvs. approximation av en funktion med dess tangentlinje) kan skrivas

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E_1(x) = P_1(x) + R_1(x), \quad R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2,$$

där R_1 betecknar resttermen (felet) vid approximationen (av ordning 1). Det är en generalisering av medelvärdessatsen.
Läs exempel 1-4.

4.8 Taylors formel, Sats 10, sid. 282, är en generalisering av linjär approximation. Denna gång approximerar man f med ett polynom P_n av grad n. Detta polynom är valt så, att dess och dess derivators värden upp till ordning n sammanfaller med f:s, i den givna punkten. Vi kan skriva detta $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, där approximationen $P_n(x)$ och felet $R_n(x)$ är givna i satsen.
Läs exempel 1, 2, 4, 6, 7.

9.8 (fram till Th. 23.) Det exakta uttrycket för resttermen ges av Th. 23, men förutsätter integration, som ännu inte introducerats. I alla händelser kan resttermen skrivas

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\, dt.$$

Läs exempel 1-2.

4.9 L'Hôpitals regler: Sats 12, sid. 294, Sats 13, sid. 296.
Läs exempel 2-8.

5.1-5.2 Här diskuteras areabegreppet och beräkning av areor genom limesövergång. Man bör genomföra någon sådan beräkning för att till fullo uppskatta effektiviteten i den metod vi senare beräknar integraler med.

Läs exempel 5.2.1-2.

5.3 Bestämda integraler införs genom över- och undersummor (Riemannsummor). Idén är att då indelningen blir finare skall, för "integrerbara" (def. 3) funktioner, dess över- och undersummor båda ha samma gränsvärde, (Riemann-)integralen av funktionen. Sats 2, sid. 320, visar att denna procedur fungerar för kontinuerliga funktioner. (Se också Appendix IV.)
Läs exempel 2-4.

5.4 Här härleds diverse egenskaper till den bestämda integralen (Sats 3, sid 321-322). Integralkalkylens medelvärdessats (Sats 4, sid 324) behövs för att visa den oumbärliga Integralkalkylens fundamentalsats i nästa avsnitt.
Läs exempel 1, 3.

5.5 Sats 5, Integralkalkylens fundamentalsats, är vad som gör integralen till ett användbart verktyg, genom kopplingen till differentialkalkylen. Satsen visar att varje kontinuerlig funktion har en primitiv funktion.
Läs exempel 2, 4, 7, 9.

5.6 Variabelsubstitution i integraler, Sats 6, sid 336, innebär att man använder kedjeregeln baklänges. Det är en viktig metod.

I samband med integrering av trigonometriska funktioner bör man kunna härleda formlerna för dubbla vinkeln; se sid 337, mellan Ex 7 och Ex 8.
Läs exempel 3-6, 8-9.

5.7 Beräkning av area mellan två kurvor. Man måste först bestämma kurvornas skärningspunkter och sedan kontrollera vilken av funktionerna som är störst i resp delintervall, dvs bestämma "över"- och "underfunktion". Därefter beräknas integralen på vanligt sätt.
Läs exempel 1-4.

6.1 Formeln för partiell integration är viktig. Den följer av produktregeln för derivator.
Läs exempel 1, 2, 5, 6.

6.2 Läs exempel 1-8. Substitutionen $\tan(\theta/2)$ är för integralentusiaster.

6.3 Det grundläggande exemplet i detta avsnitt är då nämnaren har skilda, enkla, nollställen, som i blå rutan på sid 366. Detta behandlas i ex. 3-4.

Om någon faktor i nämnaren saknar reella rötter, t ex $x^2 + 1$, måste man göra en annan ansats, som i ex 5-6.

I ex 7-8 visas vad som händer om någon av faktorerna förekommer flera gånger.

6.5 I detta avsnitt behandlas "generaliserade" integraler. De är två olika saker man måste tänka på. Dels kan integrationsintervallet vara oändligt, dels kan integranden vara obegränsad i någon av ändpunkterna. Man måste då beräkna integralen som ett gränsvärde, se ex 1, 2, 3, 5, 6.

Sats 2 om "p-integraler", sid. 381, behövs senare i samband med konvergens av serier.

7.1 Fig. 7.2-7.4 ger en föreställning om varför, rent allmänt, volym är integralen av area (formeln på övre halvan av sid 409). Formeln längst ned på samma sida behandlar rotation kring x-axeln. Cylindriska skal, sid 412, bygger på en annan idé. Fig. 7.9 visar varför formeln på sid 413 gäller.

En sammanfattning av olika fall av rotationsvolymer finns på sid 415. Det är nog bättre att man lär sig hur dessa formler härleds, i stället för att lära dem utantill.
Läs exempel 1-3, 6-7.

7.3 Båg- eller kurvlängd: formlerna mitt på sid 423. Figur 7.22 förklarar mekanismen. Läs ex 1-2.

Area av rotationsyta: se sammanställning på sid 427. (Återigen rekommenderas att man lär sig härledningen av dessa formler.) Läs ex 5-6.

9.1 Konvergens av talföljder (sequences), def. 1. Läs Ex. 5-6.

9.2 Konvergens av en (oändlig) serie betyder att följden av dess partialsummor s_n konvergerar: def. 3. Den geometriska serien, def. 4, och resultaten om den, sid. 529, är ett måste. Läs Ex. 1. Ex. 4 skall man känna till: den harmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent. Sats 4, sid. 532, ger ett test för divergens: om inte den allmänna termen a_n går mot 0 så är serien divergent. (Obs att den harmoniska serien är divergent, men dess allmänna term går mot noll.)

9.3 Positiva serier. Detta är det centrala avsnittet i kapitlet. Det är viktigt att förstå att för positiva serier finns bara två möjligheter: seriens summa är ändlig (dvs konvergent) eller oändlig (dvs divergent). Integraltestet, Sats 8, sid 535, är viktigt. Fig. 9.4 visar varför det fungerar. Dess konsekvens i Ex. 1, om p-serier, är ett måste. I Ex. 2 ges prov på en annan tillämpning av integraltestet.

Jm̈förelsekriterierna i Sats 9 är (uppenbara och) grundläggande.

Följande variant av Sats 10 (sid. 540) är mycket användbar: Om $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ och

$$\frac{a_n}{b_n} \to L, \qquad 0 < L < \infty,$$

så gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konvergent.}$$

Genom det kan man jämföra en given serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med en känd serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Se Ex. 5.
Hoppa över från Th 11 till slutet av avsnittet.

9.4 Absolutkonvergens, se def. 5. Sats 13, sid. 547, är viktig. Betingad (conditional) konvergens, def. 6. Testet för alternerande serier, Th 14, sid 548. Resten av avsnittet hoppas över.

9.5 (t.o.m. sid 555, samt Th. 19) I samband med Taylors formel såg vi exempel på potensserier. Här dyker den geometriska serien upp igen. Th. 17, sid 554, skall ni känna till. Där ingår det viktiga begreppet konvergensradie. Ni behöver inte känna till allmänna metoder att bestämma denna.

Ni skall kunna använda Th. 19, sid. 559. Innanför konvergensradien får man derivera eller integrera en potensserie termvis. Läs Ex. 5, sid 565-566, och Ex. 7, sid. 567.

9.6 Man skall kunna Taylorserierna för exponentialfunktionen (Ex 1), sinus och cosinus, Ex 2. Man kan ge direkta argument för att se att dessa serier konvergerar på hela linjen.