KTH, Matematiska institutionen

5B 1207, Diff- och int II, Flervariabel, för F1.
Lappskrivning 1, tisdag 3/2-04. Grön.

1. Beskriv ytan $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 5$.

   Lösning: Kvadratkomplettera $z^2 - 4z = (z-2)^2 - 4$. Då blir ytans ekvation $x^2 + y^2 + z - 2)^2 = 9$, vilket beskriver en sfär med centrum i $(0,0,2)$ och radie 3.

2. Bestäm tangentplanet till ytan $z = \sqrt{1 + x^3y^2}$ i punkten $(3,2)$.

   Lösning: Med $f(x,y) = \sqrt{1+x^3y^2}$ och $(a,b) = (3,2)$ är ekvationen $z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$. $f(3,2) = \sqrt{109}$, $\nabla f = (3x^2y^2/(2\sqrt{1+x^3y^2}), 2x^3y/(2\sqrt{1+x^3y^2})) = (\frac{54}{\sqrt{109}}, \frac{54}{\sqrt{109}})$ och ekvationen blir $z = \sqrt{109} + \frac{54}{\sqrt{109}}((x-3)+(y-2))$.

3. Beräkna alla andraderivator till funktionen $f(x,y) = \ln(1+\sin(xy))$.

   Lösning: $f'_x = y\cos xy/(1+\sin xy)$ ger $f''_{xx} = y(-y\sin xy \cdot (1+\sin xy) - \cos xy \cdot y \cos xy)/(1+\sin xy)^2$. Förenkling med trigonometriska ettan ger $f''_{xx} = -y^2/(1+\sin xy)^2$. Analogt fås $f''_{yy} = -x^2/(1+\sin xy)^2$. Den blandade derivatan blir

$$f''_{xy} = \frac{(\cos xy - xy\sin xy)(1+\sin xy) - y\cos xy \cdot x \cos xy}{(1+\sin xy)^2}$$

   som också kan förenklas något.