KTH, Matematiska institutionen

5B 1207, Diff- och int II, Flervariabel, för F1.
Lappskrivning 5, tisdag 2/3-04. Grön.

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xy^2\,dxdy$ över triangeln D med hörn i punkterna $(0,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$.

   Lösning: Området begränsas av linjerna $x=0$, $y=0$ och $y=x$. Då (RITA!!) går y från 0 till x och x från 0 till 1. Detta ger den upprepade integralen $\int_0^1 (\int_{y=0}^x x^2 y\,dy)\,dx = \int_0^1 [\frac{1}{2}x^2y^2]_{y=0}^x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^4]\,dx = 1/5$.

2. Kasta om integrationsordningen i den upprepade integralen $\int_0^{\pi/2}\left(\int_x^{\pi/2}\frac{\sin y}{y}\,dy\right)dx$.

   Integralen behöver inte beräknas!

   Lösning: I detta fall går y från x till $\frac{\pi}{2}$ medan x går från 0 till $\frac{\pi}{2}$. Det betyder (RITA!!) att med omvänd integrationsordning går först x från 0 till y varefter y går från 0 till $\frac{\pi}{2}$. Integralen blir alltså $\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^x \frac{\sin y}{y}\,dx\right)dy$.

3. Volymen av kroppen mellan ytorna $z = x^2+y^2$ och $3z = 4-x^2-y^2$ kan skrivas som en integral i polära koordinater. Gör det! (Integralen behöver inte beräknas.)

   Lösning: På skärningen mellan ytorna gäller $4-x^2-y^2 = 3(x^2+y^2)$, dvs $x^2+y^2=1$. Vi skall därför integrera skillnaden mellan de två funktionerna över området $D : x^2+y^2 \le 1$. Ytan $3z = 4-x^2-y^2$ ligger ovanför $z = x^2+y^2$ på området (kolla t ex i origo). Volymen blir därför $\iint_D(\frac{1}{3}(4-x^2-y^2)-(x^2+y^2))\,dxdy$ som efter förenkling och övergång till polära koordinater blir $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{4}{3}(1-r^2)\ \cdot rdrd\theta$.