KTH, Matematiska institutionen

5B 1207, Diff- och int II, Flervariabel, för F1.
Lappskrivning 8, tisdag 23/3-04. Grön.

1. Låt $\mathbf{F} = (\cos x, yz^2, y)$. Avgör vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem i så fall.

   Lösning: Alla uttrycken är definierade.

   a) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{grad}(-\sin x + z^2) = (-\cos x, 0, 2z)$.

   b) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (1 - 2yz, 0, 0)$, varför $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.

   c) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot}(1 - 2yz, 0, 0) = (0, 2y, 2z)$.

2. Beräkna flödesintegralen $\iint (-x, -y, z) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$ över den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ där $z \leq 4$ och $x \geq 0$. Ytans enhetsnormal $\widehat{\mathbf{N}}$ pekar uppåt (positiv tredjekomponent).

   Lösning: $\mathbf{N} = (-2x, -2y, 1)$. På ytan är $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 2x^2 + 2y^2 + z(x, y) = 3(x^2 + y^2)$. Vi skall integrera över området D: $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$. Flödesintegralen blir

   $\iint_D 3(x^2 + y^2)\, dxdy = (\text{pol. koord.}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^2 3r^2 \cdot r\, dr = 12\pi.$

3. Beräkna kurvintegralen $\int_C xy^2\, dx + 2xy\, dy$ där C är den positivt orienterade randen till triangeln med hörn i punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 0)$.

   Lösning: Enligt Greens formel kan integralen skrivas som en dubbelintegral över den ”solida triangeln” D:

   $\int_C xy^2\, dx + 2xy\, dy$

   $= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right) dxdy = \iint_D (2y - 2xy)\, dxdy$

   $= \int_0^1 2y \Big(\int_{x=-(1-y)}^{1-y} (1 - x)\, dx \Big)\, dy = \int_0^1 2y \Big[x - \frac{x^2}{2}\Big]_{-(1-y)}^{1-y} dy$

   $= \int_0^1 2y \cdot 2(1 - y)\, dy = 1.$