Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 3, 24/02/2005,
Tid: start tidigast: 10.15 (70 minuter max.)
(Version 1)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Bestäm största värdet för funktionen x^2+2y^2+xy då $x^2+y^2=1$.

2) Beräkna dubbelintegralen $\int\int_D y\ dxdy$ då D är en triangel med hörn i $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$.

3) Beräkna trippelintegralen $\int\int\int_D x\ dxdydz$ då

$$D = \{(x,y,z) : x+y+z \le 1, \quad x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}.$$

Lycka till

Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 3, 24/02/2005,
Tid: start tidigast: 10.15 (70 minuter max.)
(Version 2)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9. Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

.

---

1) Bestäm minsta värdet för funktionen $xy + 2y^2 + x^2$ då $x^2 + y^2 = 1$.

2) Beräkna dubbelintegralen $\int\int_\Omega y \; dxdy$ då Ω är en triangel med hörn i $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$.

3) Beräkna trippelintegralen $\int\int\int_K x \; dxdydz$ då

$$K = \{(x, y, z) : x + y + z - 1 \leq 0, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 3, 24/02/2005

(Version 1)

1) Vi kan maximera $f(x,y) = 1 + y^2 + xy$ då $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Enligt Lagranges metod skall vi lösa systemet $\nabla f = \lambda \nabla g$, dvs $y = 2\lambda x$, $2y + x = 2\lambda y$. $\lambda = 0$ ger origo som inte ligger på bivillkorskurvan, så $\lambda \neq 0$. Division ger $(x+2y)x = y^2$ varav $(x+y)^2 = 2y^2$, vilket ger $x + y = \pm\sqrt{2}y$, dvs $x = ay$, med $a = \pm\sqrt{2} - 1$. Villkoret $x^2 + y^2 = 1$ ger $y = 1/\sqrt{1+a^2}$ och $x = a/\sqrt{1+a^2}$, varför max/minvärdet blir $(1+a)/(1+a^2)$. Maximum är $1/(2(\sqrt{2}-1))$, och minimum $-1/(2(\sqrt{2}+1))$.

2) Integrationsområdet D kan representeras genom

$$D = \{x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y = -1\}$$

Integralen I kan skrivas som

$$I = \int\int_D y dx dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{0} y dy = -\int_{-1}^{0} (1+x)^2/2 dx = -1/6$$

3) Observera att största värdet x kan få i området D, är $x \leq 1 - y - z \leq 1$, då $y, z \geq 0$. P.s.s. om $z = 0$ så har vi $0 \leq y \leq 1 - x$. Integralen I kan skrivas som

$$I = \int\int\int_D y dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy =$$

$$= \int_0^1 x(1-x)^2/2 dx = \frac{1}{24}.$$