Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 5, 06/04/2005,
Tid: start tidigast: 08.15 (70 minuter max.)

(Version 1)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) En kurva har parametriseringen $(3t, 4\sin t, 4\cos t)$ då $0 \leq t \leq 2\pi$. Bestäm kurvans hastighet, acceleration samt krökningen i alla punkter.

2) Avgör huruvida dessa vektorfält är konservativa

$$a)\ \mathbf{F} = (x^2, -y^2), \qquad b)\ \mathbf{F} = (y + y\cos(xy), x + x\cos(xy)).$$

3) Beräkna linjeintegralen $\int_C xydx + y^2dy$ då C är kurvan som går från $(0,0)$ till $(1,2)$ längs $y = 2x^2$.

Lycka till

Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 5, 06/04/2005, Tid: start tidigast: 08.15 (70 minuter max.)

(Version 2)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

.

---

1) En kurva har parametriseringen $(3t, 4\sin t, 4\cos t)$ då $0 \leq t \leq 2\pi$. Bestäm kurvans hastighet, acceleration samt krökningen i alla punkter.

2) Avgör huruvida dessa vektorfält är konservativa

$$a)\ \mathbf{F} = (-x^2, y^2), \qquad b)\ \mathbf{F} = (y - y\sin(xy), x - x\sin(xy)).$$

3) Beräkna linjeintegralen $\int_C 2yxdx + y^2dy$ då C är kurvan som går från $(0,0)$ till $(2,2)$ längs $2y = x^2$.

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 5, 06/04/2005
(Version 1)

1) Låt $\mathbf{r}(t) = (3t, 4\sin t, 4\cos t)$. Då är hastigheten $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (3, 4\cos t, -4\sin t)$ som har längden (hastigheten)

$$v(t) = \sqrt{9 + 16\cos^2 t + 16\sin^2 t} = 5.$$

Vi får också accelerationsvektorn $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (0, -4\sin t, -4\cos t)$ och längden blir (accelerationen) $a(t) = 4$.

Krökningen är

$$\kappa(t) = |\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|/v^3(t) = \frac{|(-16, 12\cos t, -12\sin t)|}{5^3} = 4/25.$$

2) I båda fallen har vi att

$$D_y F_1 = D_x F_2,$$

och att dessa båda är kontinuerliga i hela planet. Alltså de borde vara konservativa. Det är inte svårt att hitta potentialfunktioner till båda fälten: $yx^2 - xy^2$, och $yx + \sin(xy)$.

3) Parametrisera

$$x = t, \quad y = 2t^2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Vi har $dx = dt$, $dy = 4tdt$. Sätter vi in i integralen får vi

$$I = \int_0^1 t(2t^2)dt + (2t^2)^2(4tdt) = \int_0^1 (2t^3 + 16t^5)dt = 19/6.$$