KTH, Matematiska institutionen

5B 1207, Diff- och int II, Flervariabel, för F1.
Lappskrivning 2, tisdag 10/2-04. Grön.

1. Låt $z = f(u/v, -v/u)$. Beräkna $u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v}$.

   Lösning: Vi skriver $x = u/v$, $y = -v/u$. Då ger kedjeregeln $uz'_u = u(z'_x x'_u + z'_y y'_u) = \frac{u}{v}z'_x + \frac{v}{u}z'_y$ samt $vz'_v = v(z'_x x'_v + z'_y y'_v) = -\frac{u}{v}z'_x - \frac{v}{u}z'_y$, varför $uz'_u + vz'_v = 0$.

2. Använd linjär approximation för att ge ett närmevärde till $f(2.2, -0.2)$ då $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$

   Lösning: Sätt $h = 0.2$, $k = -0.2$ och $(a, b) = (2, 0)$. Approximationen är $f(2.2, -0.2) = f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$.

   Här är $f(2, 0) = 3$, $\nabla f = (4x/(2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}), 2e^{2y}/(2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ i punkten. Det approximativa värdet blir $3 + 0.2(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}) = 3.2$.

3. Bestäm tangentplanet till ytan $x^3z+z^3y+xy^3 = -1$ i punkten $(1, -1, 1)$.

   Lösning: Sätt $F(x, y, z) = x^3z + z^3y + xy^3$. Tangentplanets ekvation är $\mathbf{N} \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0$, med $\mathbf{N} = \nabla F(1, -1, 1)$.

   $\nabla F = (3x^2z + y^3, z^3 + 3xy^2, x^3 + 3z^2y) = (2, 4, -2)$ i punkten.

   Ekvationen blir $x - 1 + 2(y + 1) - (z - 1) = 0$.