KTH, Matematiska institutionen

5B 1207, Diff- och int II, Flervariabel, för F1.
Lappskrivning 3, tisdag 17/2-04. Grön.

1. Ange det största värde som riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(-1,2) = D_{\mathbf{v}}f(-1,2)$ kan anta då $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2+2y^2)$.

   Lösning: Vi vet att det största värdet av $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot\mathbf{v}$ är $|\nabla f(a,b)|$, vilket erhålles då $\mathbf{v}$ och $\nabla f(a,b)$ har samma riktning. Här är $\nabla f = (x/(x^2+2y^2), 2y/(x^2+2y^2))$ som i punkten $(-1,2)$ blir $(-1/9, 2/9)$ och har belopp $\sqrt{5}/9$.

2. Variablerna u, v, x, y är relaterade genom ekvationerna $u = x^2+xy-y^2$, $v = 2xy+y^2$. Verifiera att man kan lösa ut x och y som funktioner av u och v nära den punkt där $x = 2$, $y = -1$, samt beräkna x'_u i punkten.

   Lösning: Skriv ekvationerna som $F = x^2+xy-y^2-u = 0$ och $G = 2xy+y^2-v = 0$. F och G är funktioner av (u,v,x,y). Villkoret för att kunna lösa ut x och y är att Jacobideterminanten $\partial(F,G)/\partial(x,y) \neq 0$ i punkten. Determinanten är $(2x+y)(2x+2y)-(x-2y)2y = 14$ i punkten. Villkoret är uppfyllt.

   Derivera ekvationerna med avs på u. Vi får $0 = 2xx'_u + x'_u y + xy'_u - 2yy'_y - 1 = 0$ respektive $2x'_u y + 2xy'_u + 2yy'_u = 0$. I punkten får vi $3x'_u + 4y'_u = 1$ resp $x'_u - y'_u = 0$, vilket ger $x'_u = 1/7$.

3. Bestäm taylorpolynomet av grad två, vid (0,0), till funktionen $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2+2y^2)$.

   Lösning: I origo antar f värdet 0. Det gäller också båda förstaderivatorna som beräknades i problem 1. Vi får $f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(x/(1+x^2+2y^2)) = (1\cdot(1+x^2+2y^2)-x\cdot 2x)/(1+x^2+2y^2)^2)$ och $f''_{xx}(0,0) = 1$. Derivering av samma funktion med avs. på y ger $f''_{xy} = x\cdot(-4y)/(1+x^2+2y^2)^2$ och $f''_{xy}(0,0) = 0$. Analogt får vi $f''_{yy}(0,0) = 2$. Det sökta polynomet blir $P_2(x,y) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2) = \frac{1}{2}(x^2+2y^2)$.