KTH, Matematiska institutionen

5B 1207, Diff- och int II, Flervariabel, för F1.
Lappskrivning 4, tisdag 24/2-04. Grön.

1. Samtliga följande funktioner har en kritisk punkt i origo. Avgör om det är ett lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera.

   a) $f(x, y) = 3x^2 + 16y^2$, b) $g(x, y) = 5x^2 - 9y^2$, c) $h(x, y) = x^4 + 3y^3$.

   Lösning: a) Uppenbarligen är $f(x, y) > 0$ om $(x, y) \neq (0, 0)$, medan $f(0, 0) = 0$, dvs lokalt minimum.

   b) Detta är en sadelpunkt (vare sig max eller min). (Man ser direkt att i x-led har vi ett min (sätt $y = 0$) och i y-led har vi ett max (sätt $x = 0$).)

   c) Vare sig max eller min: Om $y = 0$ får vi ett minimum. Om $x = 0$ en terasspunkt.

2. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = xy(1-x-y)$ över området $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

   Lösning: $\nabla f = (y - 2xy - y^2, x - x^2 - 2xy)$. Vi söker kritiska punkter i områdets inre, så $x \neq 0$, $y \neq 0$. Alltså måste $1-2x-y = 1-x-2y = 0$, vilket ger $x = y = 1/3$. f:s värde i denna punkt är $(1/3)^3 = 1/(27)$.

   Det finns inga singulära punkter. Återstår randen, och där är $f = 0$. Alltså är största värdet $1/(27)$ och minsta värdet 0.

3. Maximera funktionen $x^2 + 2y^2 + xy$ då $x^2 + y^2 = 1$.

   Lösning: Vi kan lika gärna maximera $f(x, y) = 1+y^2+xy$ då $g(x, y) = x^2+y^2-1 = 0$. Enl Lagranges metod skall vi lösa systemet $\nabla f = \lambda\nabla g$ dvs $y = 2\lambda x$, $2y+x = 2\lambda y$. $\lambda = 0$ ger origo som inte ligger på bivillkorskurvan, så $\lambda \neq 0$. Division ger $(x + 2y)x = y^2$ varav $(x + y)^2 = 2y^2$, vilket ger $x + y = \sqrt{2}y$ (minusrötterna leder inte till större värde), dvs $x = ay$, med $a = \sqrt{2} - 1$. Villkoret $x^2 + y^2 = 1$ ger $y = 1/\sqrt{1 + a^2}$ och $x = a/\sqrt{1 + a^2}$, varför maxvärdet blir $(1+a)/(1+a^2) = 1/(2(\sqrt{2}-1))$.