KTH, Matematiska institutionen

5B 1207, Diff- och int II, Flervariabel, för F1.
Lappskrivning 6, tisdag 9/3-04. Grön.

1. Beräkna längden av den parametriserade kurvan

   $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $t : 0 \to 2$.

   Lösning: $x'(t)^2 + y'(t)^2 = (e^t(\sin t + \cos t))^2 + (e^t(\cos t - \sin t))^2 = 2e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2e^{2t}$. Alltså blir kurvans längd

   $\int_0^2 ds = \int_0^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}[e^t]_0^2 = \sqrt{2}(e^2 - 1)$.

2. (6 poäng) I sfäriska koordinater gäller $x = \rho \cos\theta \sin\phi$, $y = \rho \sin\theta \sin\phi$ och $z = \rho\cos\phi$, med $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Beskriv följande mängder i vanliga koordinater x, y, z:

   a) $\rho = 2$. *Lösning:* Detta kan skrivas $4 = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Sfär med centrum i origo och radie 2.

   b) $\phi = \pi/2$. *Lösning:* Detta är xy-planet $z = 0$.

   c) $\theta = \pi/4$. *Lösning:* I planet är detta den del av linjen $y = x$ som ligger i första kvadranten. I rummet blir det den del av planet $y = x$ där $x \geq 0$, $y \geq 0$.