KTH, Matematiska institutionen

**5B 1207, Diff- och int II, Flervariabel, för F1.**
**Lappskrivning 7, tisdag 16/3-04. Grön.**

1. En kurva har parametriseringen $(4\sin t, -4\cos t, 3t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Bestäm kurvans hastighet och acceleration samt beräkna dess krökning.

   *Lösning:* Sätt $\mathbf{r}(t) = (4\sin t, -4\cos t, 3t)$. Hastighetsvektorn är $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3)$ och accelerationsvektorn

   $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (-4\sin t, 4\cos t, 0)$. Vi behöver också beräkna farten $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4^2\cos^2 t + 4^2\sin^2 t + 3^2} = 5$.

   Kurvans krökning beräknas enligt formeln $\kappa(t) = |\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|/v(t)^3$. Kryssprodukten blir $(12\cos t, 12\sin t, 16(\cos^2 t + \sin^2 t))$ och dess längd är 20. Vi får således konstant krökning $\kappa = 20/5^3 = 4/25$.

2. Avgör om följande vektorfält är konservativa. Bestäm potentialfunktioner i förekommande fall.

   a) $\mathbf{F} = (x^2, y^2)$ b) $\mathbf{G} = (y^2, x^2)$, c) $\mathbf{H} = (y-1, x)$.

   *Lösning:* I samtliga fall är fälten och dess derivator kontinuerliga i hela planet. Det räcker därför att kontrollera villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ om fältet är $(P, Q)$.

   a) Villkoret är att $\frac{\partial}{\partial x}(y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2)$ vilket gäller: båda led är noll. Man ser att $\frac{1}{3}(x^3 + y^3)$ är en potentialfunktion.

   b) Ej konservativt. De två leden blir $2x$ resp. $2y$.

   c) Här blir båda led lika med 1, så fältet är konservativt. Man ser att $xy - x$ är en potentialfunktion.

3. Beräkna kurvintegralen $\int_C xy^2\,dx + 2xy\,dy$ längs kurvan $y = x^3$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.

   *Lösning:* Vi kan använda $x$ som parameter, $x : 0 \to 1$. Integralen blir $\int_0^1 (xy(x)^2 + 2xy(x)\frac{dy}{dx})\,dx = [y(x) = x^3] = \int_0^1 (x \cdot x^6 + 2x \cdot x^3 \cdot 3x^2)\,dx = \int_0^1 (x^7 + 6x^6)\,dx = \frac{1}{8} + \frac{6}{7} = \frac{55}{56}$.