Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 2, 08/02/2005,
Tid: start tidigast: 10.15 (70 minuter max.)
(Version 1)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Givet är ekvationssystemet

$$x - yz - xz = 1 \qquad x + yz + yx = 1,$$

Genom att tillämpa implicitafunktionssatsen avgör om y kan skrivas som en funktion av x, kring punkten $(1, 0, 0)$?
Ledning: Betrakta $\mathbf{R^1} \times \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$. *Inga andra metoder ger poäng!*

2) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen

$$f(x, y) = \ln(1 + \frac{x}{y})$$

kring punkten $(0, 1)$.

3) Bestäm avståndet från punkten $(2, 2, 1)$ till området

$$D = \{(x, y, z) : \ x + y - z \leq -1\}.$$

Du får endast använda extremvärdemetoden, genom minimering.

Lycka till

Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 2, 08/02/2005,
Tid: start tidigast: 10.15 (70 minuter max.)
(Version 2)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

.

---

1) Givet är ekvationssystemet

$$x + xy + yz = -1, \qquad -x + yz + xz = 1$$

Genom att tillämpa implicitafunktionssatsen avgör om z kan skrivas som en funktion av x, kring punkten $(-1, 0, 0)$?
Ledning: Betrakta $\mathbf{R^1} \times \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$. *Inga andra metoder ger poäng!*

2) Funktionen $f(x, y) = \ln(1 + \frac{y}{x})$ är given. Vad är dess Taylorpolynom av grad 2 kring punkten $(1, 0)$.

3) Bestäm den punkt i området $D = \{(x, y, z) : \ -x - y + z \geq 1\}$ som har minsta avståndet från punkten $(3, 2, 1)$.
Du får endast använda extremvärdemetoden, genom minimering.

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 2, 08/02/2005

(Version 1)

1) Se detta som en avbildning

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$$

med $\mathbf{f} = (F, G) = (x - yz - xz, x + yz + yx)$. Enligt Implicita funktionssatsen ska vi betrakta Jakobianen till $\mathbf{f}$ i den aktuella punkten $(1, 0, 0)$:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & -y - x \\ z + x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Alltså implicita funktionssatsen ger att y (och även z) kan skrivas som funktion(er) av x nära punkten $(1, 0, 0)$.

2) Vi har

$$P_2(x, y) = f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) +$$

$$\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0, 1)x^2 + 2f_{xy}(0, 1)x(y - 1) + f_{yy}(0, 1)(y - 1)^2\right).$$

Beräkna derivatorna och sätt in ovan. Först förenkla funktionen

$$\ln(1 + x/y) = \ln(\frac{y + x}{y}) = \ln(y + x) - \ln y.$$

Deriveringen blir ngt enklare:

$$f_x = (y + x)^{-1}, \qquad f_{xx} = -(y + x)^{-2}, \qquad f_{xy} = -(y + x)^{-2}$$

$$f_y = (y + x)^{-1} - y^{-1}, \qquad f_{yy} = -(y + x)^{-2} + y^{-2}.$$

Dessa värden i punkten $(0, 1)$ blir

$$f_x = 1, \qquad f_{xx} = -1, \qquad f_{xy} = -1 \qquad f_y = 0, \qquad f_{yy} = 0.$$

$$P_2(x, y) = x + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x(y - 1)\right).$$

3) Om punkten är redan i området så är avståndet lika med noll. Men

$$2 + 2 - 1 = 3 > -1,$$

och punkten är utanför området D. Vidare är avståndet till D som avståndet till randen av D, dvs planet planet $x+y-z = -1$. Nu har vi avståndet mellan en punkt (x, y, z) i planet till puntken $(2, 2, 1))$

$$A(x, y, z) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Och vi ska minimera denna funktion.

Men på planet är $z = x + y + 1$, som efter insättning ger

$$A(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (x+y)^2}.$$

Istället för att minimera A kan vi också minimera A^2 som blir ngt enklare. Sätt $f(x, y) = A^2$ och förenkla ngt

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 8.$$

Minimum fås då $\nabla f = 0$ som ger

$$(0, 0) = \nabla f = (4x + 2y - 4, 4y + 2x - 4)$$

som ger

$$(x, y) = (2/3, 2/3)$$

Observera att detta måste ge minimi punkt (varför?).

Sätt in i A för att få $A(2/3, 2/3) = 4/\sqrt{3}$