Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 4, 09/03/2005, Tid: start tidigast: 08.15 (70 minuter max.)

(Version 1)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

.

---

1) Bestäm längden hos kurvan

$$(x, y) = (t^2, t^3), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

2) Beräkna dubbelintegralen $\int\int_D y \; dxdy$ då D är parallellogramet som har hörn i punkterna

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (3,7), \quad (2,6).$$

3) Beräkna trippelintegralen $\int\int\int_D z \; dxdydz$ då

$$D = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 + y^2}\}.$$

Lycka till

Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 4, 09/03/2005,
Tid: start tidigast: 08.15 (70 minuter max.)

(Version 2)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9. Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

.

---

1) Beräkna dubbelintegralen $\int\int_D y\ dxdy$ då D är parallellogramet som har hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,7)$, $(2,6)$.

2) Bestäm längden hos kurvan

$$(x,y) = (1+t^2, 1-t^3), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

3) Beräkna trippelintegralen $\int\int\int_D z\ dxdydz$ då

$$D = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2+y^2}\}.$$

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 4, 09/03/2005
(Version 1)

1) Längden ges av

$$\int_{t=0}^{t=1} ds = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} dt$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2} dt = \frac{1}{27}(4+9t^2)^{3/2}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{13\sqrt{13}}{27} - \frac{8}{27}.$$

2) Bestäm först linjerna som bestämmer parallellogramet.

$$y = x, \quad y = x+4, \quad y = 3x, \quad y = 3x-2$$

dvs

$$y - x = 0, \quad y - x = 4, \quad y - 3x = 0, \quad y - 3x = -2$$

Använd transformationen

$$u = y - x, \qquad v = y - 3x$$

där $0 \leq u \leq 4$, $-2 \leq v \leq 0$.

Integralen I kan skrivas som

$$I = \int\int_D y dx dy = \int_{-2}^{0}\int_0^4 (3u - v)/2 \ |J| du dv$$

där J är Jacobianen, som kan beräknas $J = 2$. Integralen blir då

$$I = \int\int_D y dx dy = \int_{-2}^{0}\int_0^4 (3u - v) \ du dv = 56$$

3) Använd sfäriska koordinater

$$x = r\cos\theta\sin\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\phi$$

med $J = r^2 \sin\phi$. Området kan nu beskrivas som

$$D = \{\sqrt{\sin^2\phi} \le \cos\phi, \quad r \le 1, \}.$$

Detta medför att $\cos\phi \ge 0$, och att $\sin\phi \le \cos\phi$, dvs $\tan\phi \le 1$, eller $0 \le \phi \le \pi/4$. (Observera att från början har vi $0 \le \phi \le \pi$.)

Det borde också noteras att området är oberoende av θ så att $0 \le \theta \le 2\pi$.

Vidare har vi $dV = r\sin\phi dr d\theta d\phi$ Integralen I kan skrivas som

$$I = \int\int\int_D x dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi/4} r^3 \cos\phi \sin\phi dr\phi d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$