Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 6, 13/04/2005, Tid: start tidigast: 08.15 (70 minuter max.)

(Version 1)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

---

1) Låt $\mathbf{F} = (yx, -z^2+y^2, -zy)$. Bestäm div$\mathbf{F}$, och rot$\mathbf{F}$. Tolka även rot begreppet fysikaliskt.

2) Låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält.
a) Skriv en formel/uttryck som beskriver flödet genom en orienterbar yta S. 1p
b) Låt $\mathbf{F} = (0, x^2, 0)$ och ytan S vara enhetsskivan i xz-planet (dvs $y = 0$, och $x^2 + z^2 \leq 1$). Bestäm flödet genom skivan i positiva y-riktning. 2p

3) Genom att använda Green's sats, bestäm värdet av linjeintegralen

$$\int_C x^5 y^5 dx + x^2 \sin y dy$$

över kurvan C som är övre halva delen av enhetscirkeln:

$$C: \qquad x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0.$$

Lycka till

Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 6, 13/04/2005, Tid: start tidigast: 08.15 (70 minuter max.)

(Version 2)

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Låt $\mathbf{F} = (xy, z^2 - y^2, zy)$. Bestäm div$\mathbf{F}$, och rot$\mathbf{F}$. Tolka även div begreppet fysikaliskt.

2a) Vilken formel beskriver flödet genom en orienterbar yta S i ett vektorfält $\mathbf{F}$. 1p

2b) Låt $\mathbf{F} = (y^2, 0, 0)$ och ytan S vara enhetsskivan i yz-planet (dvs $x = 0$, och $y^2 + z^2 \leq 1$). Bestäm flödet genom skivan i negativa x-riktning. 2p

3) Genom att använda Green's sats, bestäm värdet av linjeintegralen

$$\int_C x^3 y^5 dx + x^4 \sin y dy$$

över kurvan C som är övre halva delen av enhetscirkeln:

$$C: \qquad x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0.$$

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 6, 13/04/2005
(Version 1)

1)

$$\text{div}\mathbf{F} = D_xF_1+D_yF_2+D_zF_3 = D_x(yx)+D_y(-z^2+y^2)+D_z(-zy) = y+2y-y = 2y.$$

$$\text{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ D_x & D_y & D_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (D_yF_3-D_zF_2, D_zF_1-D_yF_3, D_xF_2-D_yF_1) =$$

$$= (-z-2z, 0-(-z), 0-x) = (-3z, z, -x).$$

För tolkningar av dessa begrepp se kurslitteraturen.

2a) Flödet ges av

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}, \qquad d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$$

där $\mathbf{n}$ är enhetsnormalen, och dS är ytelementet.

2b)

Flödet genom skivan är

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS,$$

där enhetsnormalen ges av $\mathbf{n} = (0,1,0)$. Vi får således $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = x^2$, och flödet blir

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S x^2 dS,$$

Vidare är ytan enhetsskivan $x^2+z^2 \leq 1$ så att $dS = dxdz$ som i polära koordninater blir $dS = rdrd\theta$, dvs

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2 rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^3dr = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos 2\theta + 1)}{2}d\theta = \frac{\pi}{4}$$

3) Låt C_1 vara den slutna kurvan som består av C samt segmentet I, som representeras med $(t, 0)$ då $-1 \leq t \leq 1$. Det gäller att

$$\int_C = \int_{C_1} - \int_I .$$

Eftersom ovan vektorfält $(x^3y^5, x^4 \sin y,) = 0$ på I (pga $y = 0$ där) så har vi

$$\int_C x^2y^5dx + x^4 \sin ydy = \int_{C_1} x^2y^5dx + x^4 \sin ydy.$$

Nu kan vi använda Greens sats på den sista integralen och få

$$\int_{C_1} x^3y^5dx + x^4 \sin ydy = \int_D \left(4x^3 \sin y - x^3(5y^4)\right) dxdy = 0,$$

då x^3 är udda och integrationsområdet är övre-halvskivan D.

Svar: integralen är lika med 0.